

6. PROPIEDADES DE LA MATERIA

Para explicar la física que interviene en el interior de una estrella vamos a repasar algunos conceptos generales sobre las propiedades y el comportamiento de la materia en las condiciones extremas de presión y temperatura que, como vimos en el Capítulo anterior, se generan en su interior en el proceso de formación. Seguiremos usando el modelo del gas ideal, sometido a diferentes condiciones porque como veremos en Capítulos posteriores, en cada etapa de la vida de la estrella el tipo de partículas cuyos efectos predominan es distinto. Como ya vimos, al principio se trata de un gas de moléculas de hidrógeno, luego estas moléculas se disocian, más tarde los átomos se ionizan y luego entran a jugar un papel importante los fotones y electrones libres, lo que muestra claramente que el tipo de partículas que forman el gas no es el mismo a lo largo del proceso. Debemos tener claro cuales son los rangos de validez de los modelos utilizados en cada etapa y cuales son las partículas cuyos efectos predominan. Por eso retomaremos la discusión acerca del gas ideal.

Límite del tratamiento clásico

Recordemos la expresión (3.31) hallada en el Capítulo 3 que nos daba el número de estados $d\mathcal{N}$ por unidad de volumen en el espacio de fases. Podemos escribir la expresión para $d\mathcal{N}$ en términos de la energía utilizando la relación:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \quad (6.01)$$

para obtener:

$$d\mathcal{N} = g_s \frac{4\pi V}{h^3} p^2 \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = \rho(\varepsilon) d\varepsilon \quad (6.02)$$

donde la notación $\rho(\varepsilon)$ indica la densidad de estados, es decir el número de estados por unidad de intervalo de energía, por lo tanto $d\mathcal{N}$ es el número de estados con energía entre ε y $\varepsilon+d\varepsilon$. Si queremos que el tratamiento clásico sea válido, el número medio de ocupación de

cada estado se tendría que poder describir por medio de la distribución gran canónica de Maxwell-Boltzmann:

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)}} \quad (6.03)$$

Luego el número medio total de partículas será:

$$\bar{N} = \int \bar{n}(\varepsilon) d\mathcal{N} = e^{\beta\mu} \int_0^{\infty} e^{-\beta\varepsilon} \rho(\varepsilon) d\varepsilon \quad (6.04)$$

Todavía no hemos tenido en cuenta la expresión de la energía y ahora debemos discriminar el caso no relativista del ultra-relativista.

Concentración cuántica no relativista

Debemos usar la forma clásica de la energía $\varepsilon = mc^2 + \frac{p^2}{2m}$ y podemos hallar que:

$$\rho(\varepsilon) d\varepsilon = g_s \frac{4\sqrt{2}\pi V m^{3/2}}{h^3} (\varepsilon - mc^2)^{1/2} d\varepsilon \quad (6.05)$$

Combinando este resultado con la relación (6.04) y realizando el cambio de variables $z = \beta(\varepsilon - mc^2)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \bar{N} &= g_s \frac{4\sqrt{2}\pi V m^{3/2}}{h^3 \beta^{3/2}} e^{\beta(\mu - mc^2)} \int_0^{\infty} e^{-z} z^{1/2} dz = g_s \frac{4\sqrt{2}\pi V m^{3/2}}{h^3 \beta^{3/2}} e^{\beta(\mu - mc^2)} \Gamma(3/2) \Rightarrow \\ \bar{N} &= g_s V \left(\frac{2\pi m}{h^2 \beta} \right)^{3/2} e^{\beta(\mu - mc^2)} \end{aligned} \quad (6.06)$$

Estamos ahora en condiciones de definir la concentración cuántica no relativista que indicaremos como n_{QNR} :

$$n_{QNR} = \left(\frac{2\pi m}{h^2 \beta} \right)^{3/2} \quad (6.07)$$

Podemos despejar el potencial químico de la relación (6.06) teniendo en cuenta que $n = \bar{N}/V$, con lo cual obtenemos:

$$\mu_{NR} = mc^2 - kT \ln \left(g_s \frac{n_{QNR}}{n} \right) \quad (6.08)$$

Validez del tratamiento clásico para partículas no relativistas

Podemos ahora utilizar la concentración cuántica para hallar una condición de validez para el tratamiento clásico utilizando la fórmula (3.05):

$$n \left(\frac{h^2 \beta}{3m} \right)^{3/2} = \left(\frac{3}{2} \pi \right)^{3/2} \frac{n}{n_{QNR}} \ll 1 \quad (6.09)$$

Como conclusión podemos usar una condición apropiada para definir la validez del tratamiento clásico no relativista:

$$n \ll n_{QNR} \quad (6.10)$$

Concentración cuántica relativista

En este caso usaremos la forma de la energía relativista $\varepsilon = cp$, con lo que obtenemos:

$$\rho(\varepsilon) d\varepsilon = g_s \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \varepsilon^2 \quad (6.11)$$

Análogamente al caso no relativista llegamos al siguiente resultado:

$$\bar{N} = g_s \frac{4\pi V}{h^3 c^3 \beta^3} e^{\beta\mu} \int_0^\infty (\beta\varepsilon)^2 e^{-\beta\varepsilon} d(\beta\varepsilon) = \frac{8\pi V}{h^3 c^3 \beta^3} g_s e^{\beta\mu} \quad (6.12)$$

con lo que podemos definir ahora la concentración cuántica relativista:

$$n_{QUR} = 8\pi \left(\frac{1}{hc\beta} \right)^3 \quad (6.13)$$

resultando el potencial químico relativista:

$$\mu_{NUR} = -kT \ln \left(g_s \frac{n_{QUR}}{n} \right) \quad (6.14)$$

Validez del tratamiento clásico para partículas relativistas

Podemos ahora utilizar la concentración cuántica para hallar una condición de validez para el tratamiento clásico utilizando la fórmula (3.05) y escribiendo λ_B como:

$$\lambda_B = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\bar{\epsilon}} = \frac{hc}{3kT} \quad (6.15)$$

queda:

$$n \left(\frac{h^2 \beta}{3m} \right)^{3/2} = \frac{8}{27} \pi \frac{n}{n_{QR}} \ll 1 \quad (6.16)$$

Como conclusión podemos usar una condición apropiada para definir la validez del tratamiento clásico relativista:

$$n \ll n_{QR} \quad (6.17)$$

Esta condición se parece mucho a (6.10) y como corolario podemos decir que:

El tratamiento clásico vale cuando la densidad de partículas es mucho menor que la concentración cuántica, ya se trate de partículas relativistas o no relativistas.

Por supuesto para hallar la concentración cuántica debemos usar (6.07) y (6.13) en los casos no relativistas y relativistas respectivamente.

Cuando en algún sistema la condición de tratamiento clásico falla debemos tomar en cuenta los efectos cuánticos. Como podemos observar en (6.07) n_{QR} es menor cuanto menor sea la masa de las partículas, por lo que los electrones serán los primeros en manifestar efectos cuánticos apreciables. En principio los electrones se comportan como un gas diluído, luego como un gas cuántico denso. Por eso a continuación pasamos a detallar las propiedades de un gas de Fermiones (el electrón es un Fermión).

Gas ideal de Fermiones

Como se mostró en el Capítulo 3 tenemos según (3.27) y (3.28) que en un gas de Fermiones que no interactúan:

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}, \quad n = \sum_i \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \quad (6.18)$$

Usando la densidad de estados por intervalo de energía, la sumatoria de la segunda expresión de las (6.18) se transforma en una integral. Además como el spin del electrón es $\frac{1}{2}$ tomaremos $g_s = 2$; luego:

$$n = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1} d\varepsilon \quad (6.19)$$

que realizando la sustitución $z = \beta\varepsilon$, podemos escribir en la forma:

$$n = 4\pi V \left(\frac{2mkT}{h^2} \right)^{3/2} e^{\mu\beta} \int_0^\infty \frac{z^{1/2}}{e^z + e^{\mu\beta}} dz \quad (6.20)$$

Esta ecuación determina el potencial químico μ , que evidentemente es función de T , V y n .

La energía de Fermi

Se define energía de Fermi al valor del potencial químico evaluado en el cero absoluto de temperatura, es decir:

$$\varepsilon_F = \mu(T=0, V, n) \quad (6.21)$$

Supongamos $\varepsilon_F < 0$, en el límite propuesto $T \rightarrow 0$, entonces $\beta \rightarrow \infty$, por lo que $\mu\beta \rightarrow \varepsilon\beta \rightarrow -\infty$ y la integral de (6.20) nos queda:

$$\int_0^\infty \frac{z^{1/2}}{e^z + e^{\mu\beta}} dz \xrightarrow{T \rightarrow 0} \int_0^\infty z^{1/2} e^{-z} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (6.22)$$

Entonces la (6.20) queda:

$$n = 4\pi V \left(\frac{2mk}{h^2} \right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} T^{3/2} e^{\frac{\mu}{kT}} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0 \quad (6.23)$$

Lo cual es absurdo, por lo que nuestra suposición de que $\varepsilon_F < 0$ es incorrecta y lo correcto sería afirmar que $\varepsilon_F > 0$, obtenemos entonces que los números de ocupación medios para los estados valen:

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \varepsilon_F)} + 1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon_i \leq \varepsilon_F \\ 0 & \text{si } \varepsilon_i > \varepsilon_F \end{cases} \quad \text{con } T = 0 \quad (6.24)$$

La interpretación de este resultado es la siguiente: cuando $T = 0$ el gas de Fermiones está en el estado de mínima energía, en el cual las partículas ocupan los n estados ψ_i de menor energía, puesto que el principio de exclusión establece que no puede haber más de una partícula en el mismo estado. La energía del nivel más alto ocupado para $T = 0$ es ε_F la cual se puede determinar a partir de la ecuación (6.19):

$$n = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \frac{8\pi}{3} V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \varepsilon_F^{3/2} \quad \text{con } T = 0 \quad (6.25)$$

de donde es fácil despejar lo que deseamos:

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi V} \right)^{2/3} \quad (6.26)$$

Definimos además, la temperatura de Fermi T_F como aquella en que $\varepsilon_F = kT_F$ y se calcula:

$$T_F = \frac{h^2}{2mk} \left(\frac{3n}{8\pi V} \right)^{2/3} \quad (6.27)$$

Podemos además definir la velocidad de Fermi por medio de $v_F \equiv \sqrt{2\varepsilon_F / m}$.

La energía interna del gas de Fermiones en el cero absoluto es:

$$E = 2 \sum_i \varepsilon_i \bar{n}_i = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon = \frac{3}{5} n \varepsilon_F = E_0 \quad \text{con } T = 0 \quad (6.28)$$

Usando este resultado y la expresión (3.41) podemos calcular la presión de un gas de Fermiones en el cero absoluto:

$$P = P_F = \frac{2}{5} n \varepsilon_F = \frac{h^2}{5m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} n^{5/3} \quad (6.29)$$

Sorprendentemente es distinta de cero.

El potencial químico

De la ecuación (6.27) podemos despejar el número de partículas en función de T_F :

$$n = \frac{8\pi}{3} V \left(\frac{2mkT_F}{h^2} \right)^{3/2} \quad (6.30)$$

Calculando la integral de la expresión (6.20) se llega al siguiente resultado:

$$1 = -\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{T}{T_F} \right)^{3/2} Li_{3/2}(-e^{\beta\mu}) \quad (6.31)$$

donde $Li_q(t)$ es la función polilogarítmica, definida por la serie:

$$Li_q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k^q} \quad (6.32)$$

Es muy difícil trabajar hallando el potencial con esta fórmula. Por suerte, teniendo en cuenta consideraciones que detallaremos más adelante, veremos que nos será útil una aproximación para temperaturas mucho más bajas que T_F . Para ello usaremos la siguiente aproximación:

$$\int_0^{\infty} \frac{z^{q-1}}{e^{z-\eta} \pm 1} dz = \mp \Gamma(q) Li_q(\mp e^{\eta}) \approx \frac{\eta^q}{q} \left(1 + \frac{2q(q-1)\pi^2}{3(3 \pm 1)\eta^2} \right), \text{ con } \eta \rightarrow \infty \quad (6.33)$$

Usando esta aproximación en la (6.20) hallamos una expresión aproximada para el potencial químico a bajas temperaturas:

$$\mu \approx \varepsilon_F \left[1 - \frac{\pi}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \text{ para } T \ll T_F \quad (6.34)$$

El valor clásico del potencial químico se obtiene tomando el límite $e^{\beta\mu} \ll 1$, con lo que la función polilogarítmica se puede aproximar tomando el primer término de la serie, de modo que, $Li_{3/2}(-e^{\beta\mu}) \approx -e^{\beta\mu}$. En este límite el potencial químico se puede despejar fácilmente de la ecuación (6.31) y combinando el resultado con la (6.30) queda:

$$\mu_{\text{clasico}} = kT \ln \left[\frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{T_F}{T} \right)^{3/2} \right] = kT \ln \left[2 \frac{V}{n} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \right] \quad (6.35)$$

Para temperaturas altas el potencial químico tiende a su expresión clásica. Para poder visualizar la forma del potencial químico podemos graficar el resultado (3.05).

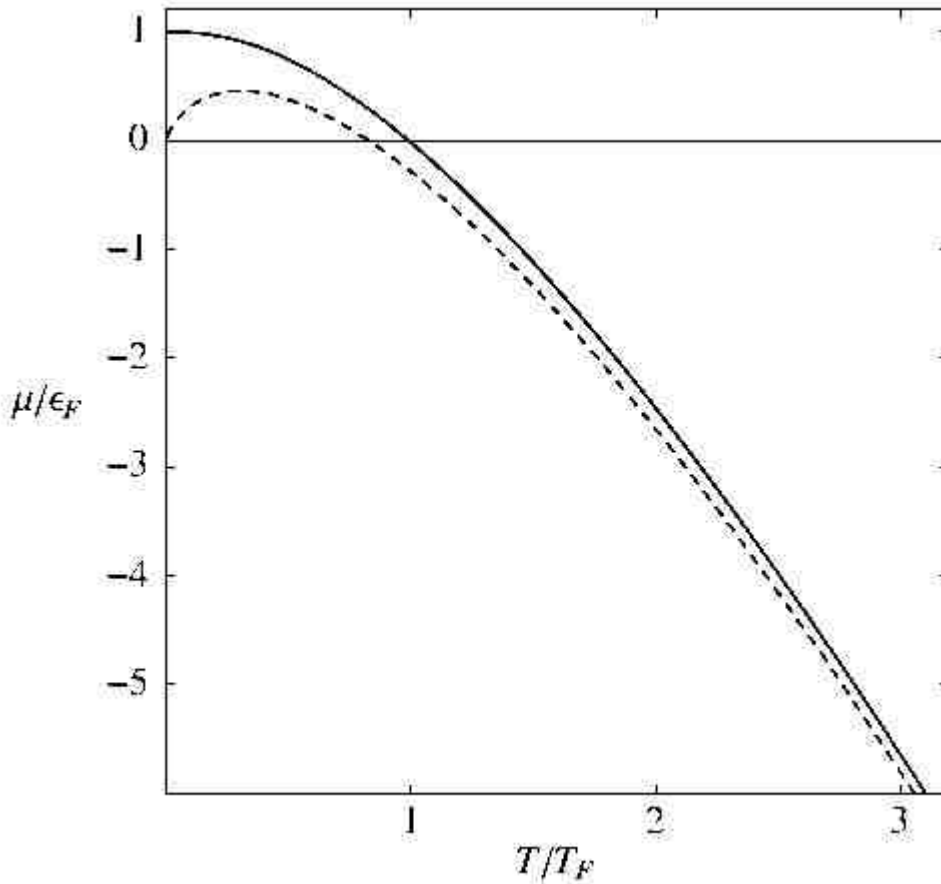


Figura 6.01. Potencial químico de un gas de Fermiones no interactuantes. Con la línea de trazos se muestra el valor de μ dado por la ecuación (6.35). Se ve que para altas temperaturas el potencial químico tiende al valor clásico.

También podemos graficar el número de ocupación para diferentes temperaturas utilizando la fórmula (6.18). En la Figura 6.02 se muestra $\bar{n}(\epsilon)$ para diferentes temperaturas de gas. El gráfico es semilogarítmico, pues así se aprecian mejor los apartamientos desde la distribución clásica de Maxwell-Boltzmann, que se representa por medio de rectas de pendiente $1/kT$. A medida que se eleva la temperatura, las partículas que estaban ocupando los estados de energía más alta, próxima a la de Fermi, se excitan y pasan desde los estados con $\epsilon < \epsilon_F$ a estados con $\epsilon > \epsilon_F$.

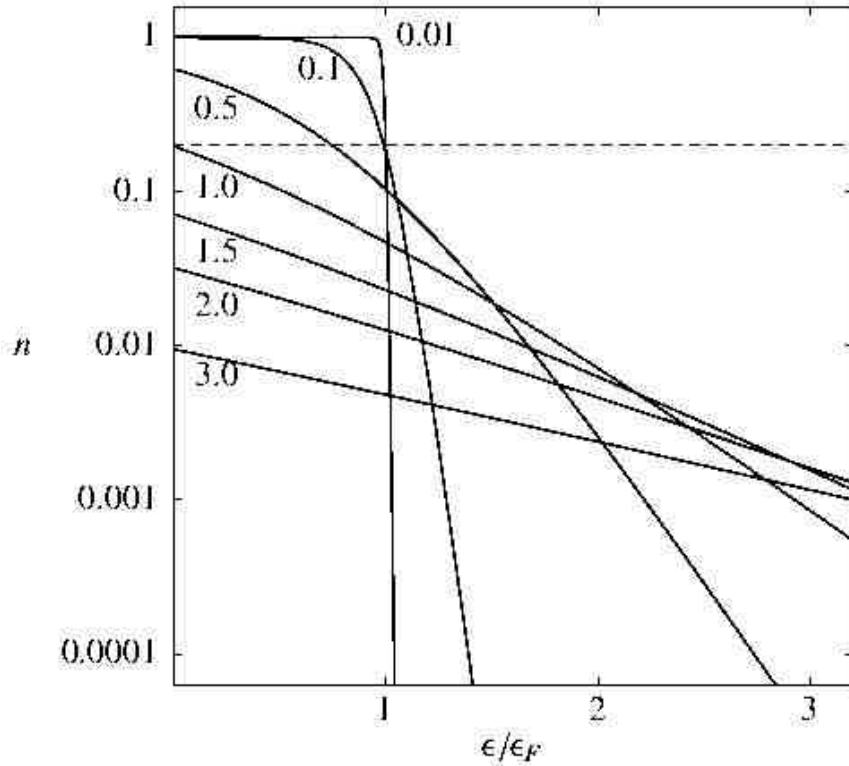


Figura 6.02. Número de ocupación medio en función de la energía del estado para un gas de Fermiones. Las curvas corresponden a $T/T_F = 0.01, 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2$ y 3 . Se puede observar que las curvas para $T/T_F = 1.5, 2$ y 3 son casi rectas, lo que indica que el comportamiento del gas es clásico, como era de esperar ya que $\bar{n}(\epsilon) \ll 1$.

Como vimos anteriormente los efectos cuánticos comienzan a ser importantes cuando $n \approx n_Q$, por lo que la ecuación (6.16) se puede poner en función de la temperatura:

$$T \approx \frac{h^2}{3mk} n^{2/3} \approx T_F \quad (6.36)$$

O sea que un gas de Fermiones cuántico es frío, pero el orden de magnitud de la temperatura para la cual podemos considerar que el sistema está frío depende de la densidad de partículas, para una densidad muy elevada frío puede significar algunos millones de grados.

Un gas de Fermiones se dice degenerado cuando su temperatura es inferior a la temperatura de Fermi; en el cero absoluto está completamente degenerado. Se le dice degenerado porque para los Fermiones se cumple el principio de exclusión, que no permite más de una partícula por estado, lo cual obliga a las partículas a ocupar estados de mayor energía. Si la temperatura es muy alta ($T \gg T_F$), el sistema no es degenerado puesto que los números

medios de ocupación de los estados son mucho menores que la unidad, y en ese caso el principio de exclusión tiene poco efecto en la práctica. El gas se comporta entonces como un gas clásico. La transición entre el gas completamente degenerado en $T = 0$ y el gas clásico para $T \gg T_F$ es continua, pero la descripción matemática del gas en este rango de temperaturas es complicada.

En los procesos que estudiaremos la temperatura varía a medida que éstos se desarrollan, por eso estamos obligados a estudiar la forma de la energía y del calor específico de un gas de Fermiones.

Energía y calor específico

La energía del gas de Fermiones esta dada por:

$$E = 2 \sum_i \varepsilon_i \bar{n}_i = 2 \sum_i \frac{\varepsilon_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \cong \frac{3}{2} n \varepsilon_F^{-3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} d\varepsilon \quad (6.37)$$

Haciendo uso nuevamente de la (6.33) podemos calcular la integral, con lo que hallamos la energía y su expresión aproximada para temperaturas bajas con respecto a T_F . Se obtiene:

$$E = -\frac{9\sqrt{\pi}}{8} nkT \left(\frac{T}{T_F} \right)^{3/2} Li_{5/2}(-e^{\beta\mu}) \quad (6.38)$$

y por lo tanto:

$$E \approx \frac{3}{5} n \varepsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \quad \text{para } T \ll T_F \quad (6.39)$$

Para calcular el calor específico molar a volumen constante usaremos su definición.

Recordando que $nk = NR$, donde N es el número de moles, tenemos:

$$\tilde{c}_V = \frac{R}{nk} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \quad (6.40)$$

Derivando la expresión (6.31) con respecto a T se puede obtener:

$$\frac{\mu}{kT} - \frac{1}{k} \frac{\partial \mu}{\partial T} = \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2}(-e^{\beta\mu})}{Li_{1/2}(-e^{\beta\mu})} \quad (6.41)$$

Utilizando entonces (6.38), (6.40), (6.41) y (6.33) obtenemos finalmente la expresión de \tilde{c}_V y su forma aproximada para temperaturas bajas con respecto a T_F :

$$\tilde{c}_V = -\frac{9\sqrt{\pi}}{8} R \left(\frac{T}{T_F} \right)^{3/2} \left[\frac{5}{2} Li_{5/2}(-e^{\beta\mu}) - \frac{3}{2} \frac{Li_{3/2}(-e^{\beta\mu})^2}{Li_{1/2}(-e^{\beta\mu})} \right] \quad (6.42)$$

$$\tilde{c}_V \approx \frac{\pi^2}{2} R \frac{T}{T_F} \quad \text{para } T \ll T_F \quad (6.43)$$

Se podría esperar que para Fermiones degenerados ($T \ll T_F$) al aumentar la temperatura a partir de cero hasta un valor T la energía de una partícula aumente en kT , es decir cambiaría su estado pasando a otro de energía mayor, pero este estado al cual debería ir a parar nuestra partícula está ocupado por otra, entonces el principio de exclusión de Pauli nos obliga a concluir que la partícula no se excitará. Las partículas que se encuentren en un estado de energía próximo a ε_F solo se podrán excitar si logran pasar desde los estados con $\varepsilon < \varepsilon_F$ a estados con $\varepsilon > \varepsilon_F$. Estas partículas deberán estar en un intervalo de energía del orden de kT alrededor de ε_F y su número es del orden de:

$$n_{exc} \approx \rho(\varepsilon_F) kT \quad (6.44)$$

Tengamos claro que n_{exc} es aproximadamente el número de partículas que cambiarán de estado al aumentar la temperatura mientras que el resto de las partículas no se inmuta, siendo esto último una diferencia notable respecto del tratamiento clásico. Para calcular este número usamos (6.05) y (6.44) para obtener:

$$n_{exc} \approx \frac{8\sqrt{2}\pi V m^{3/2}}{h^3} \varepsilon_F^{1/2} kT \quad (6.45)$$

Dividiendo por la expresión (6.25) obtenemos la fracción de partículas que es excitada:

$$\frac{n_{exc}}{n} \approx \frac{3}{2} \frac{T}{T_F} \quad (6.46)$$

Puesto que cada una de las partículas excitadas lleva una energía del orden de kT , tenemos:

$$E(T) \approx E_0 + kT n_{exc} = \frac{3}{5} n \varepsilon_F \left[1 + \frac{5}{2} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 \right] \quad (T \ll T_F) \quad (6.47)$$

$$\tilde{c}_V \approx 3R \frac{T}{T_F} \quad (T \ll T_F) \quad (6.48)$$

Con esto confirmamos que nuestra estimación es correcta, ya que estas dos últimas expresiones comparadas con (6.39) y (6.43) difieren muy poco.

Recordemos que en el desarrollo anterior se consideró un gas de Fermiones no relativista, y el resultado será aplicable cuando la energía máxima alcanzada por los electrones es pequeña con respecto a la masa de las partículas, es decir $\varepsilon_F \ll m_e c^2$; como trataremos con electrones conviene expresar esta condición en términos de la cantidad de electrones por metro cúbico:

$$n_e \ll \left(\frac{m_e c}{h} \right)^3 = \left(\frac{1}{\lambda_C} \right)^3 \quad (6.49)$$

en donde $\lambda_C = 2.4 \times 10^{-12}$ m es la longitud de onda Compton del electrón. Fuera de este límite se tendrán que hacer consideraciones relativistas, utilizando la densidad de estados (6.11) y de manera análoga al caso no relativista se llega a:

$$E_F = \frac{3Vhc}{4} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} n^{4/3}, \quad P_F = \frac{hc}{4} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} n^{4/3} \quad (6.50)$$

Como se puede observar fácilmente de las ecuaciones (6.29) y (6.50), en ambos casos la presión del gas degenerado de Fermiones crece con la densidad, pero la rapidez del incremento es menor en el caso ultra-relativista. Entender los límites de las transiciones de electrones clásicos a degenerados, de no relativistas a ultra-relativistas, es muy importante en astrofísica. Debido a que durante la evolución de una estrella las condiciones a las cuales está sometida la materia en su interior varían mucho, podemos encontrar partículas clásicas no relativistas o ultra-relativistas, y en otros casos encontraremos partículas de gas degeneradas también no relativistas o ultra-relativistas. Ya que se pueden dar varios casos conviene visualizar los distintos regímenes de las partículas para distintas temperaturas y distintas densidades en un gráfico:

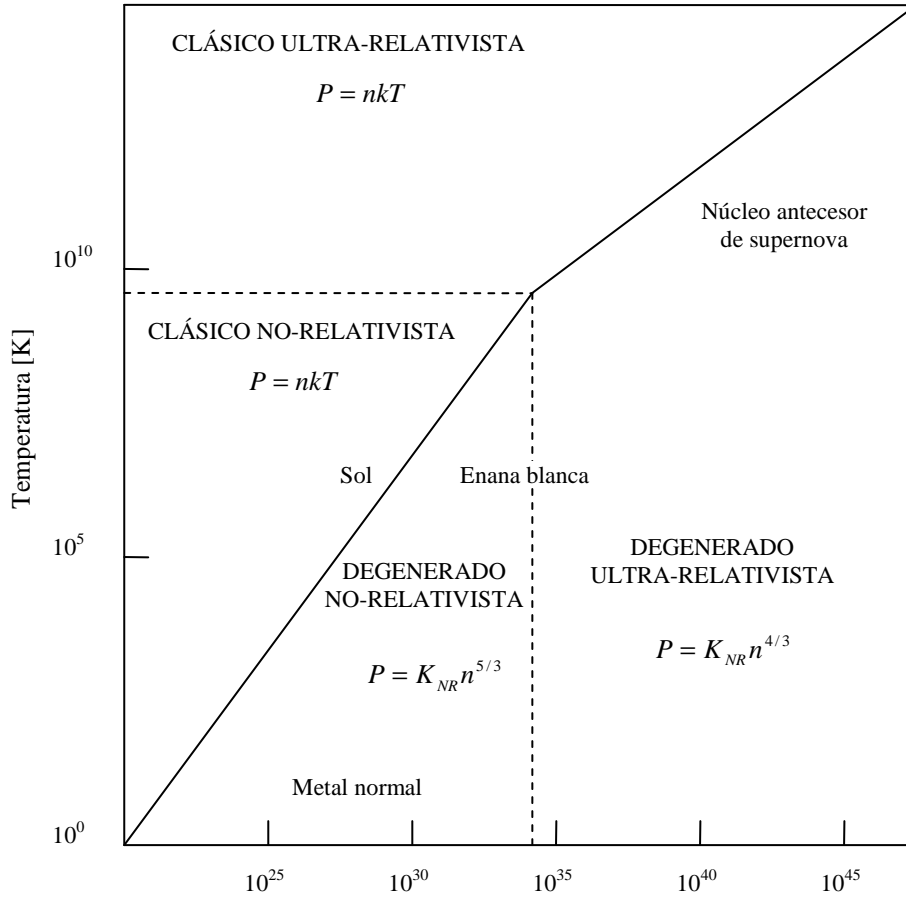


Figura 6.03. Se ilustra el régimen de validez de las distintas ecuaciones de estado para un gas de electrones a temperatura T y densidad de partículas n_e .

Para abreviar las ecuaciones de la Figura 6.03 se definieron:

$$K_{UR} = \frac{hc}{4} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3} \quad \text{y} \quad K_{NR} = \frac{h^2}{5m} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \quad (6.51)$$

Y se los utilizará de aquí en adelante cuando sea conveniente.

Las líneas que delimitan los distintos regímenes de validez en la Figura 6.03 son aproximadamente:

$$n = n_{QNR} \approx 2 \times 10^{21} T^{3/2} \text{ m}^{-3},$$

$$n = n_{QUR} \approx 8 \times 10^6 T^3 \text{ m}^{-3},$$

$$n = (mc/h)^3 \approx 7 \times 10^{34} \text{ m}^{-3},$$

$$T = mc^2 / k \approx 6 \times 10^9 \text{ K}$$

En la práctica el gas de electrones no es ideal, ya que los electrones interactúan. La principal corrección a la ecuación de estado se debe hacer teniendo en cuenta la interacción eléctrica entre los electrones y los iones, pero el modelo de gas ideal es una buena aproximación en los casos que nos interesan.

Gas Fotonos (Radiación)

La radiación de cuerpo negro se puede estudiar como un gas perfecto de fotones en equilibrio térmico. Este gas es un gas ideal porque todas sus partículas se mueven a la misma velocidad, la velocidad de la luz. Los fotones tienen spin 1, o sea son Bosones y corresponde aplicar la estadística de Bose-Einstein. De acuerdo con la hipótesis de Einstein vamos a suponer que los fotones son partículas de masa nula y energía dada por:

$$\varepsilon_i = h\nu_i \quad (6.52)$$

La característica inusual del gas de fotones es que el número de partículas puede cambiar pues hay que tener en cuenta que los fotones pueden ser emitidos y absorbidos por las paredes de la cavidad (este es el mecanismo que garantiza el equilibrio de la radiación de cuerpo negro a T y V fijos), y entonces n no se conoce a priori sino que está determinado por la condición de equilibrio a T y V fijos. Esto implica que el potencial químico del gas de fotones es idénticamente nulo. Para todo cambio espontáneo a T y V fijos se cumple:

$$\Delta F \leq 0 \quad (6.53)$$

Donde F es la función de Helmholtz, que en el equilibrio debe ser un mínimo, lo que nos lleva a:

$$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial n} \right)_{T,V} = 0 \quad (6.54)$$

A partir de este resultado podemos deducir todas las propiedades del gas reemplazando en (3.24), y como los fotones son partícula ultra-relativistas debemos usar la densidad de estados por intervalo de frecuencia (6.11), con lo que se obtiene la densidad de energía por unidad de volumen en el intervalo de frecuencia entre ν y $\nu + \Delta\nu$, en la forma:

$$\bar{u}(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad (6.55)$$

Ésta es la distribución espectral de Planck, que podemos integrar para obtener la densidad de energía radiante:

$$\frac{E}{V} = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} d\nu = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} T^4 = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad (6.56)$$

donde σ es la constante de Stefan-Boltzmann. Como lo que nos interesa es ver de qué manera contribuye la radiación a la presión interior de la estrella combinamos (6.56) con la presión para partículas relativistas (3.42) y obtenemos:

$$P = \frac{4\sigma}{3c} T^4 \quad (6.57)$$

Por último mencionaremos que la capacidad calorífica para un gas de Bosones se puede calcular de manera similar a como hicimos para el gas de Fermiones y resulta:

$$C_{\text{Bosones}} = \frac{16\sigma}{c} T^4 \quad (6.58)$$

Transferencia de calor

Este fenómeno nos interesa porque en el interior de una estrella habrá zonas donde se genera calor y que luego se distribuye al resto. La transferencia de calor por conducción es un proceso del tipo difusivo en el cual la energía térmica, debida al movimiento de las partículas, se transfiere de una región caliente a una región fría. Debido a las colisiones esa energía en exceso se transfiere a las partículas que la rodean. En este tipo de transferencia de calor no hay migración neta de partículas. Consideremos un gas en el que la temperatura varía lentamente a lo largo de una coordenada x , de manera que habrá un flujo de calor a través de la superficie perpendicular a \hat{x} ubicada en x . La ley experimental de la conducción del calor expresa que el flujo de calor j (calor que atraviesa la unidad de área en la unidad de tiempo) es proporcional al gradiente de la temperatura¹:

¹ El flujo de calor en barras metálicas fue estudiado analíticamente por Jean-Baptiste Joseph Fourier y medido por Jean-Baptiste Biot en 1816.

$$j(x) = -K \frac{dT}{dx} \quad (6.59)$$

donde K es el *coeficiente de conducción térmica*, o *conductividad térmica* del gas.

Para un gas clásico ionizado con concentración de electrones es n_e y concentración de iones n_i , se puede demostrar que:

$$K_e \approx \frac{k}{2\pi} \frac{n_e}{n_i} \left(\frac{3kT}{m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{4\pi\epsilon_0 kT}{Ze^2} \right)^2 \quad (6.60)$$

$$K_i \approx \frac{1}{Z^2} \left(\frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} K_e$$

donde Z es la carga del ion.

Si las partículas del gas son fotones la transferencia de calor se llama *difusión por radiación*.

La interacción de los fotones con la materia se puede dar mediante diversos procesos en los cuales el camino medio libre es distinto. Como la conductividad térmica depende del camino libre medio de las partículas, la interacción de los fotones con la materia es la que regula el tiempo que un fotón tarda en abandonar una estrella. Para este caso es conveniente definir la opacidad κ y expresar j en función de ella, κ determina cuánto le cuesta a un fotón generado en el centro de la estrella salir de ella y cómo se dispersa, de ahí el nombre ya que nos dice cuán opaca es la estrella. Decimos entonces que:

$$j(x) = -\frac{16\sigma}{3} \frac{T^3}{\rho\kappa} \frac{dT}{dx} \quad (6.61)$$

De las interacciones de los fotones con la materia la más importante es el scattering de Thomson, que consiste en la dispersión de fotones por parte de electrones libres en la cual no se absorbe radiación, pero disminuye el ritmo de escape de la misma. Con la ayuda de algunas definiciones que daremos en Capítulos posteriores se puede ver que:

$$\kappa_s = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c} \right) \frac{1 + X_1}{2m_p} \approx 0.02(1 + X_1) \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \quad (6.62)$$

donde X_1 es la fracción de masa de hidrógeno. Otro caso que se puede dar es que un fotón sea absorbido por un electrón; si el electrón que interactúa está inicialmente ligado a un ion

tenemos un proceso de absorción *ligado-libre* y si no está ligado lo llamamos proceso de absorción *libre-libre* y podemos usar la *ley de Kramers*:

$$\kappa \propto \kappa_0 \frac{\rho}{T^{7/2}} \quad (6.63)$$

Aquí κ_0 depende de las fracciones de masa de hidrógeno y Helio presentes.

La otra forma en que se distribuye el calor dentro de una estrella es debido a la *transferencia de calor por convección*, esto significa que las parcelas del gas se trasladan de un lugar a otro llevando consigo su energía térmica. Cuando una nube de gas está rodeada por otra con diferente temperatura y densidad se establecen corrientes complejas que transportan materia y calor desde las zonas calientes a las frías. Este proceso ocurre sólo cuando el gradiente de temperaturas excede cierto valor crítico. Si suponemos que los paquetes que transportan el calor se expanden adiabáticamente hasta que su presión iguala la presión del ambiente, éste valor crítico esta dado por:

$$\frac{dT}{dx} < \frac{(\gamma-1) T}{\gamma P} \frac{dP}{dx} \quad (6.64)$$

donde γ es el índice adiabático del gas. El mecanismo de convección requiere que la temperatura disminuya rápidamente con la altura. Esta disminución está determinada por el índice adiabático y el gradiente de presión. Como este último es negativo también lo será el gradiente de temperatura.

Gradiente de temperatura

El gradiente de temperatura dentro de una estrella está determinado por el ritmo con que se libera energía hacia la superficie y por el mecanismo que gobierna este flujo de energía. Se define la *luminosidad* $L(r)$ como la energía total que fluye por unidad de tiempo hacia el exterior de una esfera de radio r dentro de la estrella. La liberación de energía del núcleo implica que $L(r)$ aumenta con el radio hasta llegar a regiones donde no se libera energía. Llamamos $\varepsilon(r)$ a la densidad de energía liberada en r , entonces como se ve claramente en la

Figura 6.04, la potencia generada en una cáscara localizada entre r y dr es igual a la diferencia de luminosidad antes y después de la cáscara ubicada en r .

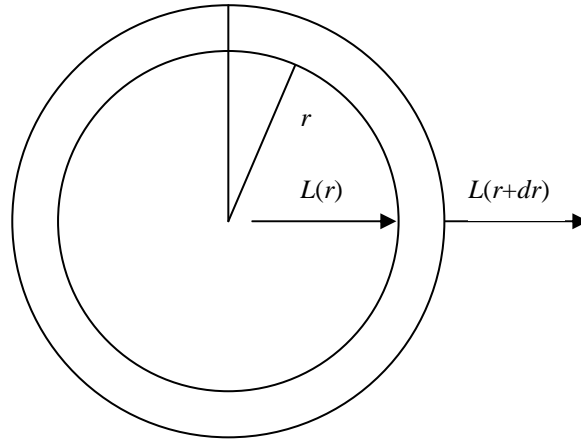


Figura 6.04. Se muestra que al estar la cáscara liberando energía, la luminosidad dentro y fuera de ésta es distinta.

$$L(r + dr) - L(r) = \varepsilon(r)\pi 4r^2 dr \quad (6.65)$$

Por lo tanto:

$$\frac{dL}{dr} = \pi 4r^2 \varepsilon(r) \quad (6.66)$$

Fuera del núcleo no se genera energía, por lo que la luminosidad es constante y tiende a la luminosidad de la estrella. Si el mecanismo que controla la transferencia de calor es la difusión de radiación, el flujo total de potencia saliente es $\pi 4r^2 j(r)$, donde $j(r)$ esta dada por (6.61). Por lo tanto:

$$\frac{L(r)}{\pi 4r^2} = -\frac{4ac[T(r)]^3}{3\rho(r)\kappa(r)} \frac{dT}{dr} \quad (6.67)$$

Entonces, en este caso, el gradiente de temperaturas esta dado por:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{rad} = -\frac{3\rho(r)\kappa(r)L(r)}{4ac[T(r)]^3 \pi 4r^2} \quad (6.68)$$

Debemos tener en cuenta que ésta es una aproximación en la que se están despreciando los efectos de la transmisión de calor por convección y se está suponiendo que la estrella tiene simetría esférica y se mantiene en equilibrio.

Ordenes de magnitud

Para mostrar la aplicación de las teorías que se acaban de presentar daremos a algunos números que indican los roles que juegan los electrones y los fotones en las estrellas.

Electrones en el sol

Según los modelos teóricos mas aceptados en la actualidad, el Sol es un cuerpo con una densidad media de $1.4 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ compuesto por electrones e iones que forman un gas ideal, a una temperatura de $6 \times 10^6 \text{ K}$. Para ver si debemos considerar los electrones como relativistas o no, comparamos la energía térmica con el resto de la energía de los electrones, se comprueba que $kT \approx 10^{-3} mc^2$, por lo que se los puede considerar como partículas no relativistas. Por otro lado la densidad media del Sol implica una concentración media de electrones de $6 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$, que comparada con la concentración cuántica no relativista $n_{QNR} \approx 3 \times 10^{31} \text{ m}^{-3}$ a la temperatura media, la cual se calcula usando (6.07), nos muestra que los electrones en el Sol forman un gas diluido con una concentración mucho menor a la necesaria para considerarlos cuánticos, por lo tanto en promedio se comportan como partículas clásicas no relativistas. Como ya recalcamos, éstos son los valores promedio, pero cuando concentramos nuestra atención en el centro del Sol donde se hallan las condiciones más extremas de presión y temperatura la situación cambia. El centro contiene electrones con una concentración de aproximadamente $8 \times 10^{31} \text{ m}^{-3}$ a una temperatura de $1.6 \times 10^7 \text{ K}$. Utilizando nuevamente la (6.07) encontramos que $n_{QNR} \approx 1.5 \times 10^{32} \text{ m}^{-3}$, por lo que también en su centro podemos considerar los electrones como clásicos.

Fotones en el Sol

En la superficie del Sol la presión de radiación insignificante, incluso comparada con los órdenes que se manejan en la Tierra, aproximadamente $3 \times 10^{-6} \text{ atm}$. En el interior, como ya mostramos, la situación cambia y esta presión se vuelve inmensa desde el punto de vista humano, más o menos $3 \times 10^6 \text{ atm}$, pero no lo suficientemente grande para soportar y detener

el colapso gravitatorio, por lo que para nuestro Sol en su fase actual podemos olvidarnos de la presión de radiación.

7. SISTEMAS CON VARIOS TIPOS DE PARTÍCULAS

Como ya señalamos el interior de una estrella contiene moléculas, átomos disociados, iones, electrones libres y fotones. Los mecanismos de interacción entre ellos son complejos, pero podemos extraer conclusiones precisas suponiendo que la materia y la radiación se encuentran en equilibrio térmico. El equilibrio de un sistema bajo condiciones de T y P constantes se obtiene a partir del mínimo del potencial de Gibbs. Consideremos una mezcla de gases constituido por partículas de tipo A, B, C y D que pueden sufrir una reacción química según la fórmula $A + B \Leftrightarrow C + D$; el equilibrio térmico se alcanza cuando el potencial químico de las partículas A y B iguala al de C y D:

$$\mu_A + \mu_B = \mu_C + \mu_D \quad (7.01)$$

Estas ideas las podemos aplicar a diferentes casos.

Ionización del hidrógeno monoatómico

El electrón de un átomo de hidrógeno puede ocupar niveles discretos de energía ε_n que representan los estados cuánticos $n = 1, 2, \dots$; hay infinitos niveles de energía, con un punto de acumulación en $\varepsilon = 0$ para $n \rightarrow \infty$. Cuando el átomo se ioniza, el electrón puede ocupar un continuo de estados con momento p y energía ε_p . La interacción con los fotones puede causar que un electrón gane energía y el átomo se ionice; a temperaturas altas esto es muy frecuente y los átomos están siendo continuamente excitados e ionizados. Podemos escribir simbólicamente la reacción de ionización del hidrógeno monoatómico como:



donde γ, p, e, H_n , representan fotones, protones, electrones e hidrógeno con su electrón en el estado cuántico n , respectivamente. La energía del estado fundamental (energía de ligadura del electrón) es $\varepsilon_0 = -13.6 \text{ eV}$. Traducida en equivalente térmico mediante $kT_I = |\varepsilon_0|$, resulta una “temperatura de ionización” $T_I = 15.8 \times 10^4 \text{ K}$. La condición de equilibrio se escribe

7. Sistemas con varios tipos de partículas

mediante los potenciales químicos de las cuatro especies y como el potencial químico del fotón es cero queda:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_{H_n} \quad (7.03)$$

Si la densidad es suficientemente baja podemos asumir que todas las componentes son gases ideales y si son no relativistas, empleando (6.08) hallamos que:

$$\mu_e = m_e c^2 - kT \ln \left[\frac{g_e n_{Qe}}{n_e} \right], \quad \mu_p = m_p c^2 - kT \ln \left[\frac{g_p n_{Qp}}{n_p} \right]$$

$$\mu_{H_n} = m_{H_n} c^2 - kT \ln \left[\frac{g_{H_n} n_{QH_n}}{n_{H_n}} \right] \quad (7.04)$$

donde para tener en cuenta la posibilidad de que los niveles energéticos de las tres especies tengan también la degeneración de spin debemos poner $g_e = g_p = 2$, debido al spin de electrones y protones, mientras que para el hidrógeno $g_{H_n} = 4n^2$, ya que se consideran la degeneración del spin del electrón y del protón. La masa de un átomo de hidrógeno en el estado ε_n está dada por:

$$m_{H_n} c^2 = m_e c^2 + m_p c^2 + \varepsilon_n \quad (7.05)$$

Combinando las ecuaciones (7.05), (7.04) y (7.03) se obtiene:

$$kT \ln \left(2 \frac{n_{Qe}}{n_e} \right) + kT \ln \left(2 \frac{n_{Qp}}{n_p} \right) = |\varepsilon_n| + kT \ln \left(4n^2 \frac{n_{QH_n}}{n_{H_n}} \right) \quad (7.06)$$

que tomando la exponencial de ambos miembros y reemplazando las n_Q provenientes de (6.07) se llega a la relación entre las concentraciones de electrones, protones y átomos de hidrógeno:

$$\frac{n_H}{n_e n_p} = n^2 \left(\frac{2\pi m_r kT}{h^2} \right)^{-3/2} e^{\beta|\varepsilon_n|} \quad (7.07)$$

donde:

$$m_r = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \quad (7.08)$$

7. Sistemas con varios tipos de partículas

es la masa reducida del sistema electrón-protón y donde hemos usado la relación $m_H = m_e + m_p$. Dado que los electrones y los protones se originan por ionización del átomo neutro, la mezcla de gases es eléctricamente neutra y debe ser:

$$n_e = n_p \quad (7.09)$$

Además $m_r \approx m_e$ de modo que la condición de equilibrio se puede escribir en la forma:

$$\frac{n_e n_p}{n_H} = \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\beta|\epsilon_0|} = n_{Qe} e^{-\beta|\epsilon_0|} \quad (7.10)$$

donde por simplicidad supusimos que en primera aproximación los niveles excitados del hidrógeno no cuentan. El grado de ionización del gas se define como:

$$\chi = \frac{n_e}{n_p + n_H} = \frac{n_p}{n_e + n_H} \quad (7.11)$$

De aquí con un poco de álgebra se obtiene la siguiente ecuación cuadrática:

$$\frac{\chi^2}{1-\chi} = \frac{1}{n} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\beta|\epsilon_0|} \quad (7.12)$$

conocida como ecuación de Saha. Reemplazando los valores numéricos de las constantes, el grado de ionización del hidrógeno monoatómico se calcula con la fórmula:

$$\frac{\chi^2}{1-\chi} = 3 \times 10^{21} \frac{m_H}{\rho} T^{3/2} e^{-\frac{158000}{T}} \quad (7.13)$$

Mezcla de gases ionizados

En algunas situaciones suponer que los átomos están completamente ionizados puede ser una simplificación útil que permite hallar una expresión para el numero total de partículas y su masa promedio. Llamemos X_1 , X_4 , X_A a las fracciones de la masa total del hidrógeno, Helio y elementos más pesados. Si la materia no estuviera ionizada, el número de átomos de cada material sería:

$$n_1 = \frac{X_1 \rho}{m_H}, \quad n_4 = \frac{X_4 \rho}{4m_H}, \quad n_A = \frac{X_A \rho}{A m_H} \quad (7.14)$$

7. Sistemas con varios tipos de partículas

Cuando el átomo de hidrógeno se ioniza resultan dos partículas: un protón y un electrón. Cuando lo hace uno de Helio resultan tres: dos electrones y un núcleo. Cuando se ioniza el átomo pesado resultan Z electrones y un núcleo, digamos $A/2$ partículas. Entonces el número total de partículas en el gas totalmente ionizado es:

$$n \approx 2n_1 + 3n_4 + \frac{A}{2}n_A = \left[2X_1 + \frac{3}{4}X_4 + \frac{1}{2}X_A \right] \frac{\rho}{m_H} \quad (7.15)$$

Sabemos que $X_1 + X_2 + X_3 = 1$, tenemos:

$$n \approx [1 + 3X_1 + 0.5X_4] \frac{\rho}{2m_H} \text{ y } \bar{m} = \frac{\rho}{n} \approx \frac{2m_H}{1 + 3X_1 + 0.5X_4} \quad (7.16)$$

Finamente usando que $Z \approx A/2$:

$$n_e \approx (X_1 + 1) \frac{\rho}{2m_H} \text{ y } n_i \approx \left(2X_1 + \frac{1}{2}X_4 \right) \frac{\rho}{2m_H} \quad (7.17)$$

Producción de pares electrón-positrón

Cuando la temperatura alcanza niveles considerables tienen lugar otro tipo de reacciones, una de las cuales es la creación de pares electrón-positrón. Estos pares se producen cuando la energía térmica kT se vuelve comparable con $m_e c^2$. Para hallar las concentraciones de electrones y positrones, n_{e^-} y n_{e^+} , empezamos por considerar la reacción:



Como el potencial químico de los fotones es nulo podemos escribir:

$$\mu_{e^-} + \mu_{e^+} = 0 \quad (7.19)$$

Si estas partículas forman un gas clásico podemos usar la expresión (6.08) para el potencial químico para obtener:

$$n_{e^-} n_{e^+} = 4n_0^2 e^{-\frac{2m_e c^2}{kT}} \quad (7.20)$$

donde n_0 es la concentración cuántica de electrones o positrones.

Por otro lado cuando la densidad es grande y los electrones están degenerados la producción de estos pares esta inhibida, ya que todo electrón que se produzca deberá ocupar un estado

hasta entonces desocupado. Entonces la producción de pares es favorecida por la alta temperatura y la baja densidad. Esta prohibición para la producción de pares implica que el sistema puede comenzar a producir neutrinos:



Si bien la mayor parte de los pares electrón-positrón se aniquilan para fotones, uno de cada 10^{22} pares se aniquila para dar neutrinos.

Fotodesintegración de núcleos

Otro proceso que tiene lugar cuando la temperatura es elevada es la fotodesintegración de los núcleos, un proceso análogo a la ionización de los átomos. Como las energías de unión del núcleo son millones de veces más elevadas que las atómicas, este proceso se vuelve importante recién para temperaturas del orden 3×10^9 K. Es de especial interés la fotodesintegración del neón que podemos escribir:



El núcleo de ${}^4\text{He}$ liberado puede ser luego capturado por un núcleo de neón que aun no fue disociado para formar ${}^{24}\text{Mg}$.

Reacciones nucleares

Consideremos dos núcleos con cargas Z_A y Z_B y masas m_A y m_B . Cuando están muy separadas estas partículas interactúan mediante el potencial de Coulomb:

$$\frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (7.23)$$

siendo r la separación entre ellas; cuando r es muy pequeño (del orden de un Fermi¹) comienza a intervenir además el potencial nuclear fuerte, que es atractivo y como su nombre lo indica muy poderoso. En la Figura 7.01 representamos gráficamente el potencial debido a las dos interacciones.

¹ El Fermi es una unidad de distancia, 1 Fermi = 10^{-15} m

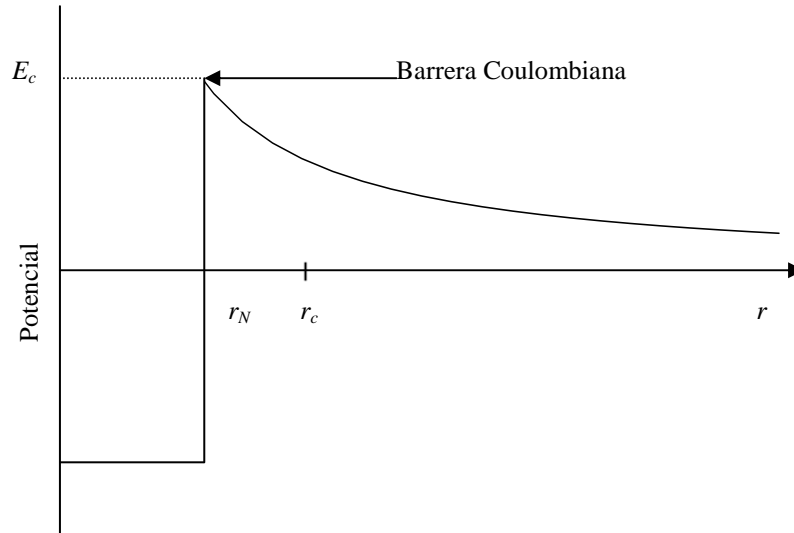


Figura 7.01. Potencial de interacción Coulombiano y nuclear fuerte entre las dos partículas de carga Z_A y Z_B .

Como se muestra en la Figura 7.01 la barrera Coulombiana se opone a la aproximación de los núcleos dificultando la fusión. Si los núcleos poseen suficiente energía cinética podrán pasar esta barrera, aproximándose a una distancia $r < r_N$ y será posible la fusión. Si expresamos r_N en Fermi podemos escribir la altura de esta barrera como:

$$E_C = \frac{Z_A Z_B e^2}{4\pi\epsilon_0 r_N} \approx \frac{1.4 Z_A Z_B}{r_N(\text{Fermi})} \text{ MeV} \quad (7.24)$$

Si los núcleos no alcanzan estos niveles de energía podríamos decir que clásicamente no hay posibilidad de que se produzca la fusión, pero la Mecánica Cuántica establece la existencia del efecto túnel, debido al cual los núcleos tienen una probabilidad no nula de atravesar la barrera y puede ocurrir la fusión. A esta probabilidad se le llama probabilidad de penetración y la podemos hallar resolviendo la ecuación de Schrödinger para dos núcleos sometidos al potencial $V(r)$:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m_r} + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r) \quad (7.25)$$

donde m_r es la masa reducida del sistema como en (7.08). Se puede mostrar que para este potencial una aproximación de la probabilidad de penetración de la barrera está dada por:

$$P_p \approx e^{-2 \int_a^b \kappa(r) dr}, \quad \kappa(r) = \sqrt{2m_r [V(r) - E]} \hbar^{-2} \quad (7.26)$$

7. Sistemas con varios tipos de partículas

donde los límites de integración son $a = r_n$ y $b = r_c$ siendo este último la distancia mínima hasta la que el potencial se puede considerar Coulombiano. La integral se puede calcular y el resultado se expresa en términos de la energía de Gamow definida como:

$$E_G = (\pi\alpha Z_A Z_B)^2 2m_r c^2 \quad (7.27)$$

donde $\alpha = e^2(4\pi\epsilon_0\hbar c)^{-1} \approx 1/137$ es la constante de estructura fina. Finalmente la probabilidad de penetración queda:

$$P_p \approx e^{-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}} \quad (7.28)$$

Esta probabilidad determina el ritmo con el que se fusionan los núcleos. La probabilidad de que se produzca la fusión nuclear se expresa usualmente en términos de la *sección eficaz de fusión*, que depende de qué núcleos se consideren.

Sea un gas constituido por esferas rígidas de diámetro a . Para definir la *sección eficaz* de choque entre partículas consideremos que una partícula atraviesa una región poblada por n blancos con los cuales puede chocar. En un intervalo de tiempo t nuestra partícula recorre una distancia x , y choca con otra si sus dos centros se encuentran a una distancia menor o igual que a . Por consiguiente chocará con todas las partículas que se encuentran dentro de un cilindro de longitud x y sección πa^2 . Si hay n partículas por unidad de volumen ocurrirán $n_c = n\pi a^2 x$ colisiones. Por lo tanto el camino libre medio es:

$$\bar{l} = \frac{x}{n_c} = \frac{1}{n\pi a^2} \quad (7.29)$$

La cantidad $\sigma = \pi a^2$ se denomina *sección eficaz de colisión*, y que podemos relacionar el camino libre medio con la sección eficaz:

$$\bar{l} = \frac{1}{n\sigma} \quad (7.30)$$

Ahora que tenemos una noción de lo que es la *sección eficaz* para la colisión entre partículas consideradas como esferas rígidas podemos extender este concepto a otro tipo de interacciones como las que producen la fusión nuclear. Entonces decimos que la sección eficaz de una reacción es el área efectiva del blanco que es proporcional a la probabilidad de

7. Sistemas con varios tipos de partículas

que la reacción se produzca, de modo que (7.30) sigue valiendo pero tendremos que dar una forma de calcular la *sección eficaz de fusión* en función de las propiedades de los núcleos, dado que depende de la energía del núcleo y de las interacciones nucleares y electromagnéticas. El cálculo exacto es un problema muy complicado. A bajas energías podemos considerar que σ es proporcional a la probabilidad de penetración de la barrera Coulombiana, y en la práctica se puede usar la siguiente expresión:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}} \quad (7.31)$$

El factor $S(E)$ depende de la física de la fusión, pero varía muy lentamente excepto cerca de la resonancia nuclear. Ahora podemos intentar estimar el ritmo al que se fusionan los núcleos. Consideremos un gas caliente ionizado que contiene dos tipos de núcleos A y B con concentraciones n_A y n_B , que se pueden fusionar con una sección eficaz σ . En principio supongamos que los núcleos B están quietos y que los A se mueven todos con velocidad v . De acuerdo con (7.30) un núcleo tipo A viaja una distancia de $1/n_B\sigma$ antes de fusionarse con un núcleo B y el tiempo promedio para que ocurra la fusión es $\tau_A = 1/n_B v\sigma$. Entonces tenemos que por unidad de volumen n_A núcleos A se fusionan con un ritmo de $R_{AB} = n_A n_B v\sigma$ por segundo. Como en realidad los núcleos B no están fijos la sección eficaz dependerá de la velocidad relativa de los núcleos. Si $P(v_r)dv_r$ es la probabilidad de que v_r esté comprendida entre v_r y v_r+dv_r entonces:

$$\langle v_r \sigma \rangle = \int_0^{\infty} v_r \sigma P(v_r) dv_r \quad (7.32)$$

Por lo que el tiempo para que se fusionen dos núcleos y el ritmo de fusión son:

$$\tau_A = \frac{1}{n_B \langle v_r \sigma \rangle} \text{ y } R_{AB} = n_A n_B \langle v_r \sigma \rangle \quad (7.33)$$

Cuando se trata de núcleos idénticos el producto $n_A n_B$ representa el número de posibles pares de núcleos que se pueden fusionar y debemos reemplazarlo por $n(n-1)/2 \approx n^2/2$.

Cuando los núcleos forman un gas clásico no relativista con una distribución de velocidades dada por la distribución de Maxwell, podemos escribir:

7. Sistemas con varios tipos de partículas

$$P(v_r)dv_r = 4\pi \left(\frac{m_r}{2\pi kT} \right)^{3/2} v_r^2 e^{-\frac{mv_r^2}{2kT}} dv_r \quad (7.34)$$

en la ecuación (7.32) y realizar el cambio de variables $E = v_r^2 m_r / 2$ para obtener:

$$\langle v_r \sigma \rangle = \left[\frac{8}{m_r \pi} \right]^{1/2} \left[\frac{1}{kT} \right]^{3/2} \int_0^\infty E \sigma(E) e^{-\frac{E}{kT}} dE \quad (7.35)$$

Para encontrar una expresión del ritmo de fusión por unidad de volumen podemos reemplazar la forma de la sección eficaz de fusión dada por (7.31) en (7.35) y reemplazar $\langle v_r \sigma \rangle$ en la segunda de las (7.33), quedando:

$$R_{AB} = n_A n_B \left[\frac{8}{m_r \pi} \right]^{1/2} \left[\frac{1}{kT} \right]^{3/2} \int_0^\infty S(E) e^{-\frac{E}{kT}} e^{-\left(\frac{E_G}{E}\right)^{1/2}} dE \quad (7.36)$$

Como el factor $S(E)$ varía muy lentamente se puede considerar constante² y la dependencia con E proviene las dos exponenciales de la integral. La forma del integrando se puede apreciar en la Figura 7.02:

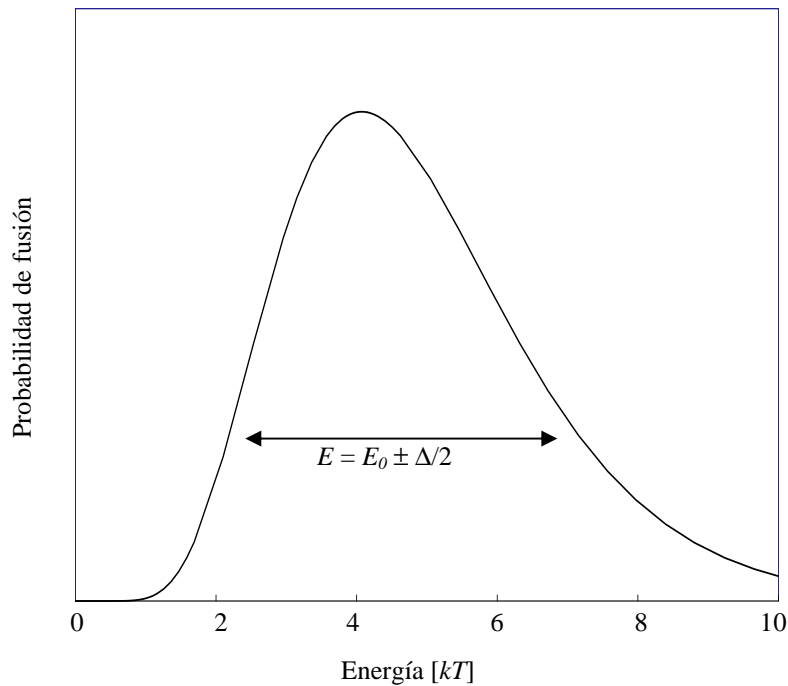


Figura 7.02. Probabilidad de fusión en función de kT para dos núcleos de hidrógeno a temperatura del orden de 10^7K , puede observarse que hay un rango de energía donde la fusión es posible.

² Este factor depende del tipo de reacción y generalmente se lo determina experimentalmente.

Como se ve en la Figura 7.02 R_{AB} tiene un máximo cuando para cierta energía E_0 y alrededor del cual hay un rango de energías dado por:

$$E_0 - \Delta/2 < E < E_0 + \Delta/2 \quad (7.37)$$

donde la fusión es posible. Aquí:

$$E_0 = \left[\frac{E_G (kT)^2}{4} \right]^{1/3} \quad \text{y} \quad \Delta = \frac{4}{3^{1/2} 2^{1/3}} E_G^{1/6} (kT)^{5/6} \quad (7.38)$$

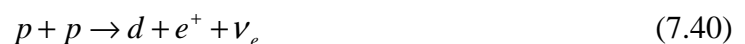
Las expresiones (7.37) y (7.38) muestran que la fusión ocurre dentro de un rango determinado por la temperatura del gas y por E_G . Una aproximación aceptable de la integral de (7.36) nos da una fórmula para calcular fácilmente como depende el ritmo de fusión de los parámetros clave:

$$R_{AB} \propto n_A n_B S(E_0) e^{-3 \left(\frac{E_G}{4kT} \right)^{1/3}} \quad (7.39)$$

donde podemos ver claramente que la lentitud de la fusión está fuertemente determinada por la energía de Gamow, es decir por el tipo de reacción involucrada. Está claro entonces que en presencia de varias especies de núcleos se verá privilegiada la fusión de ciertas especies sobre otras cuya E_G es menor.

La combustión del hidrógeno

El resultado neto de la combustión del hidrógeno es convertir cuatro protones en un núcleo de Helio. Para que esto ocurra, en alguna etapa del proceso dos protones se tienen que transformar en neutrones. El proceso más plausible que permite que un protón se transforme en un neutrón está descrito por la reacción, $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$, que ocurre por virtud de la interacción nuclear débil. El neutrón que así se produce es capturado rápidamente por algún protón para formar un núcleo de deuterio, de modo que las dos reacciones mencionadas se pueden escribir como:



7. Sistemas con varios tipos de partículas

Este proceso libera una energía de 0.43 MeV. Pero el positrón se aniquila rápidamente con un electrón liberando otros de 1.02 MeV. De toda esta energía los neutrinos, que atraviesan la materia casi sin interactuar, se llevan un porcentaje pequeño.

Inmediatamente después el deuterio pasa a sufrir otra reacción:



El factor S de esta reacción es 18 órdenes de magnitud mayor que el de la reacción anterior, por eso decimos que (7.41) ocurre inmediatamente después de (7.40), de hecho la vida media del deuterio antes de fusionarse en el interior del Sol es de unos segundos. Llegado este punto la reacción puede tomar diferentes caminos como se observa en la Figura 7.03:

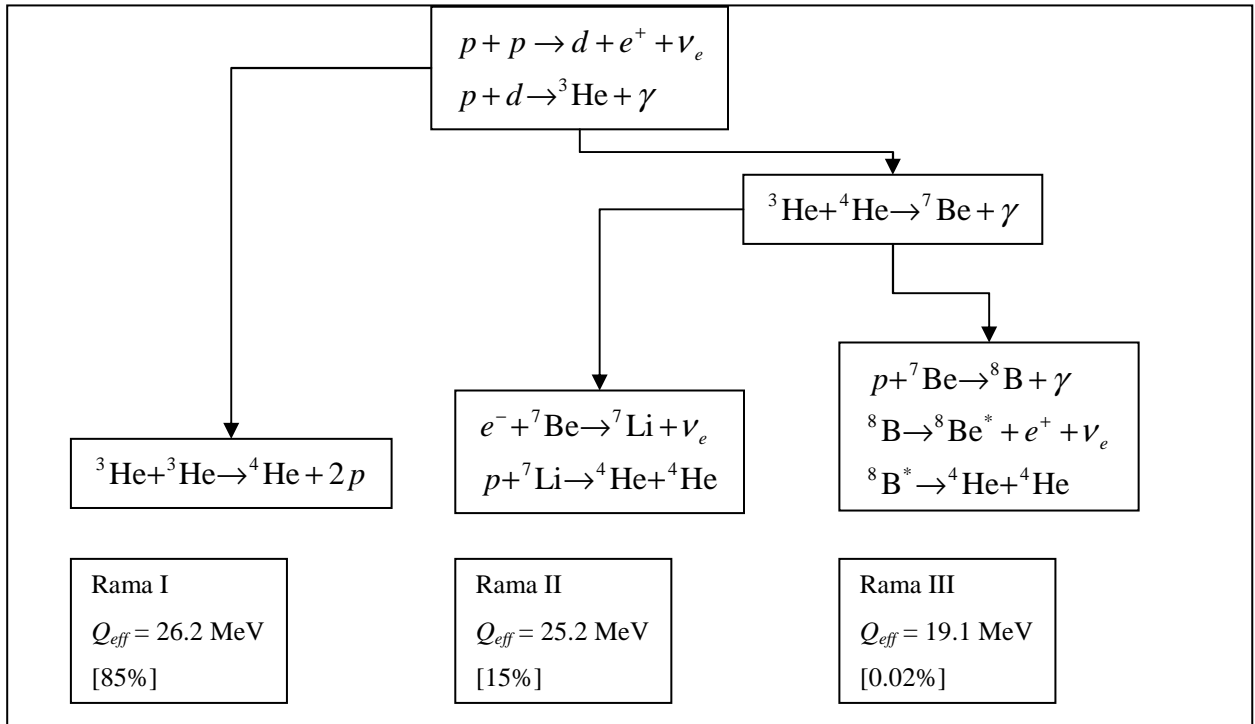


Figura 7.03. Los tres posibles ramas para la cadena protón-protón con el resultado neto $4p \rightarrow {}^4\text{He} + Q_{eff}$, donde Q_{eff} es energía efectiva liberada por la rama que incluye la energía de la desintegración de positrones pero no la energía que se llevan los neutrinos. Entre corchetes se indica el porcentaje en que cada rama es terminada.

Para que se den las ramas II y III de la Figura 7.03 es necesaria la presencia del ${}^4\text{He}$ que actúa como catalizador, en el camino de destruye un ${}^4\text{He}$ pero al final de cada rama hay más ${}^4\text{He}$ que al principio.

La reacción (7.40) es la primera en ocurrir y la más lenta, por lo que éste es el proceso que regula la tasa de liberación de energía. La cadena de reacciones que acaba de describir recibe el nombre de Cadena protón-protón.

Otro modo en que puede quemarse el hidrógeno es mediante el ciclo del Carbono-nitrógeno, para que se de esta reacción es necesaria la presencia de núcleos pesados que se reciclan continuamente para crear Helio en cada ciclo de la siguiente manera (Figura 7.04)³:

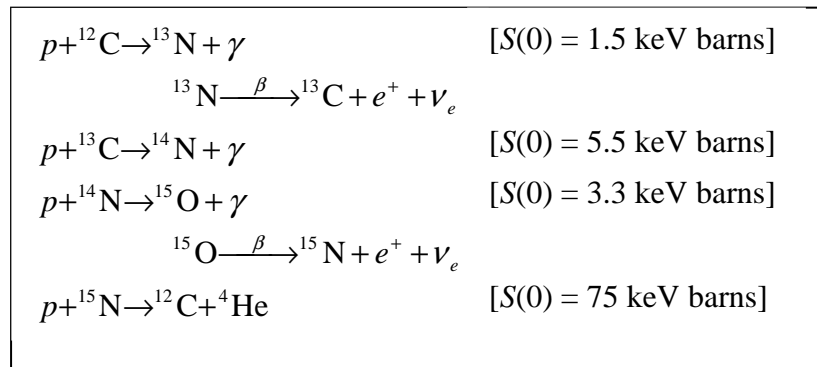


Figura 7.04. Se muestra el ciclo del Carbono-nitrógeno. El ciclo comienza con la fusión de un núcleo de Carbono con uno de hidrógeno para formar nitrógeno, el cual sufre un decaimiento beta (que indicamos con $\xrightarrow{\beta}$) y culmina con la reposición del Carbono y la adición de un núcleo de Helio.

La energía liberada en este ciclo es $Q_{\text{eff}} = 23.8 \text{ MeV}$ (sin incluir la energía que se llevan los neutrinos). El efecto neto del ciclo lo podemos escribir como $4p \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e$, el Carbono actúa sólo como catalizador y la cantidad de estos átomos no cambia. El ritmo de liberación de energía está gobernado por la reacción más lenta de la secuencia, que es:



Combustión de elementos más pesados

La fusión del Helio se da de formas diversas, una de las cuales figura en la primera ramificación de la fusión del hidrógeno vía la reacción protón-protón, pero como en una estrella el residuo de la fusión del hidrógeno es el ${}^4\text{He}$ consideraremos las reacciones que

³ El barn es una unidad de superficie, $1 \text{ barn} = 10^{-28} \text{ m}^2$

7. Sistemas con varios tipos de partículas

tengan este elemento como combustible, la primera tiene como resultado la producción de ${}^8\text{Be}$, y responde a la siguiente fórmula:



El ${}^8\text{Be}$ es inestable por lo que tiene una vida media corta, aproximadamente 2.6×10^{-16} s, y vuelve a decaer en dos átomos de Helio tal como indica (7.43). Pero a altas densidades y temperaturas cercanas a 10^8 K el ritmo de formación de ${}^8\text{Be}$ puede ser suficiente para generar una población significativa de ${}^8\text{Be}$ diluido en el gas de Helio. Si la reacción (7.43) alcanza el equilibrio termodinámico, la población estacionaria se puede calcular igualando el potencial químico de un núcleo de ${}^8\text{Be}$ con el de un par de núcleos de ${}^4\text{He}$:

$$\mu_8 = \mu_4 + \mu_4 \quad (7.44)$$

Usando las definiciones (6.08) y (6.09) podemos despejar:

$$\frac{n_8}{n_4} = 2^{3/2} \left(\frac{h^2}{2\pi m_4 kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{(m_8 - 2m_4)c^2}{kT}} \quad (7.45)$$

Debemos tener en cuenta que $(m_8 - 2m_4)c^2 = 91.8$ KeV. Por ejemplo si la densidad del Helio es 10^8 kg m⁻³ con temperatura 2×10^8 K la concentración de ${}^4\text{He}$ es $n_4 \approx \rho/m_4 = 1.5 \times 10^{34}$ m⁻³ y la concentración de ${}^8\text{Be}$ es 7×10^{26} m⁻³, o sea que hay un núcleo de berilio por cada veinte millones de núcleos de Helio, por lo tanto (7.45) muestra que la concentración del ${}^8\text{Be}$ cae rápidamente al descender la temperatura. Con la temperatura adecuada el sistema está en condiciones de pasar a la siguiente etapa en la que se captura otro núcleo de Helio para producir Carbono en estado excitado:



Análogamente tenemos:

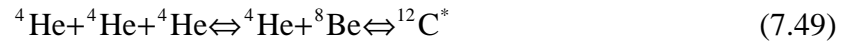
$$\frac{n_{12}^*}{n_4 n_8} = \left(\frac{3}{2} \right)^{3/2} \left(\frac{h^2}{2\pi m_4 kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{(m_{12}^* - m_4 - m_8)c^2}{kT}} \quad (7.47)$$

Usando (7.45) podemos obtener:

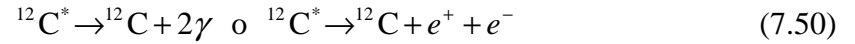
7. Sistemas con varios tipos de partículas

$$\frac{n_{12}^*}{n_4^3} = (3)^{3/2} \left(\frac{h^2}{2\pi m_4 kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{(m_{12}^* - 3m_4)c^2}{kT}} \quad (7.48)$$

Vemos así que la producción de berilio es fundamental para la producción del Carbono excitado. Siguiendo con el ejemplo anterior usando (7.48) tendríamos que $n_{12}^* = 3 \times 10^{14} \text{ m}^{-3}$ otra vez la población de $^{12}\text{C}^*$ es muy sensible a la temperatura, pero si ésta se mantiene cerca de $2 \times 10^8 \text{ K}$ conviven pequeñas poblaciones de Carbono excitado con el berilio y el Helio. Resumiendo:



En el estadio final del proceso el Carbono excitado decae a Carbono por dos caminos posibles:



La vida media para el decaimiento del Carbono excitado al Carbono es $\tau(^{12}\text{C}^* \rightarrow ^{12}\text{C}) = 1.8 \times 10^{-16} \text{ s}$ y en el proceso (7.50) se libera una energía de 7.65 MeV. Este decaimiento es irreversible e influye fuertemente en el equilibrio dado por (7.50) porque sólo uno de cada 25000 núcleos decae. El ritmo de producción del ^{12}C es entonces:

$$\frac{dn_{12}}{dt} = \frac{n_{12}^*}{\tau(^{12}\text{C}^* \rightarrow ^{12}\text{C})} \quad (7.51)$$

Usando (7.48) queda:

$$\frac{dn_{12}}{dt} = \frac{n_4^3}{\tau(^{12}\text{C}^* \rightarrow ^{12}\text{C})} 3^{3/2} \left(\frac{h^2}{2\pi m_4 kT} \right)^3 e^{-\frac{(m_{12}^* - 3m_4)c^2}{kT}} \quad (7.52)$$

Este es el ritmo de producción de Carbono en un gas de Helio y su expresión es relativamente simple debido a que las reacciones intermedias ocurren en el equilibrio. Teniendo en cuenta estos procesos podemos concluir que la energía neta liberada en la creación de Carbono-12 en los procesos (7.49) y (7.50) es de $(3m_4 - m_{12})c^2 = 7.275 \text{ MeV}$, por lo tanto el ritmo de liberación de energía queda:

$$\epsilon_{3\alpha} = (3m_4 - m_{12})c^2 \frac{dn_{12}}{dt} \quad (7.53)$$

7. Sistemas con varios tipos de partículas

Con el subíndice 3α indicamos los tres núcleos de Helio-4 (partículas α). Continuando con el ejemplo, con $T = 2 \times 10^8$ K y $\rho = 10^8$ kg m⁻³, según (4.47) $n_{12}^* = 3 \times 10^{14}$ m⁻³, y según (7.52) el ¹²C se produce a un ritmo de 1.9×10^{30} m⁻³s⁻¹ y de (7.53) resulta que el ritmo de liberación de energía es 2.2×10^{18} W m⁻³. Como vimos este ritmo es muy sensible a la temperatura ya que está dominado por la exponencial de (7.52).

Cuando el ¹²C está presente puede capturar otras partículas α y producir elementos más pesados por medio de las reacciones que resumimos a continuación:



Otras reacciones pueden ocurrir cuando la temperatura es del orden de 5×10^8 K y la densidad 3×10^9 kg m⁻³:



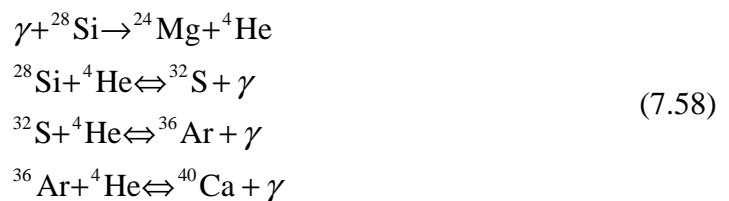
La combustión del neón ocurre después de la del Carbono si la temperatura alcanza los 10^9 K:



Cuando la temperatura alcanza los 2×10^9 K el Oxígeno se fusiona para producir silicio:



La fusión del silicio comienza a los 4×10^9 K, y algunas de las reacciones involucradas son:



Cuando la temperatura llega a 4×10^9 K comienza a ser frecuente la fotodesintegración de ciertos elemento para dar partículas α , protones y neutrones, que son capturados enseguida por los elementos más estables. El producto final para las estrellas más masivas es un núcleo

7. Sistemas con varios tipos de partículas

de hierro del que ya no se puede extraer energía y veremos más adelante como termina una estrella de este tipo.

Por último exponemos en la Tabla 7.01 los tiempos típicos que duran las sucesivas etapas en las que se va quemando combustible de una estrella de $25 M_{\odot}$.

Combustible	Duración	Temperatura	Densidad
Hidrógeno	7×10^6 años	0.06×10^9 K	$5 \times 10^4 \text{ kg m}^{-3}$
Helio	5×10^5 años	0.23×10^9 K	$7 \times 10^5 \text{ kg m}^{-3}$
Carbono	600 años	0.93×10^9 K	$2 \times 10^8 \text{ kg m}^{-3}$
Neón	1 año	1.7×10^9 K	$4 \times 10^9 \text{ kg m}^{-3}$
Oxígeno	6 meses	2.3×10^9 K	$1 \times 10^{10} \text{ kg m}^{-3}$
Silicio	1 día	4.1×10^9 K	$3 \times 10^{10} \text{ kg m}^{-3}$

Tabla 7.01. Se muestra la duración típica, temperatura y densidad de las distintas etapas de fusión de una estrella de $25 M_{\odot}$.