

SOBRE FUNDAMENTACIÓN

[1. La axiomatización](#)

[1.1. Axiomatizar](#)

[1.2. Estructura de un sistema axiomático](#)

[1.3. ¿Qué es la metamatemática?](#)

[2. La concepción de la matemática](#)

[3. La antigua concepción de la matemática](#)

[4. Una antigua sospecha](#)

[5. El cambio en la concepción de la matemática](#)

[6. El problema de la consistencia interna](#)

[6.1. Naturaleza del problema](#)

[6.2. El método del modelo](#)

[6.3. Pruebas absolutas de consistencia](#)

[6.4. La consistencia de lógica de proposiciones](#)

[7. Consistencia y Completitud](#)

[8. Las pruebas de Gödel](#)

[8.1. La idea de la representación](#)

[8.2. Números Gödel](#)

[8.3. Aritmetizar la Metamatemática](#)

[8.4. La fórmula G. Demostrabilidad de G](#)

[8.5. Descubrimiento de la incompletitud](#)

[9. Limitaciones del método axiomática](#)

[10. Bibliografía](#)

[\[Regresar\]](#)

1. LA AXIOMATIZACION:

1.1. Axiomatizar:

La base de la construcción de cualquier disciplina matemática es el método axiomático, es decir, el establecimiento de un conjunto de reglas de razonamiento, de enunciados postulados o axiomas a partir de las cuales, y por las reglas de inferencia del sistema, se derivan otros enunciados o proposiciones que llamaremos teoremas.

Un axioma es un enunciado aceptado como regla del juego de la inferencia lógica. Es un principio que permite iniciar un proceso lógico de deducción tomándolo como partida de los pasos de razonamiento.

El conjunto inicial de signos, definiciones, enunciados postulados o axiomas y reglas de derivación desde tales axiomas es el **Sistema Axiomático** de la disciplina que se construye. Este conjunto inicial de axiomas o reglas no puede ser un conjunto cualquiera de enunciados, sino que debe cumplir los necesarios requisitos que permitan el desarrollo lógico.

Debe ser, en efecto, indecidible, consistente y no contradictorio. El objetivo es que sea completo, es decir, que a partir de él pueda derivarse cualquier enunciado de la disciplina a la cuál sirve de fundamento.

1. **Indecidibilidad:** Ningún axioma del sistema puede ser obtenido como un teorema partiendo de los restantes.

2. **Consistente internamente:** Nunca podrá ser derivada una contradicción como teorema.

3. **No contradictoriedad:** Lo afirmado por un axioma no contradice a lo afirmado por cualquiera de los restantes axiomas del sistema.

[\[Regresar\]](#)

1.2. Estructura de un sistema axiomático:

Un sistema axiomático bien diseñado, **S**, debe contener necesariamente los siguientes elementos:

1. Una lista de letras y de los demás símbolos a utilizar en **S**.
2. Una serie de reglas que establezcan qué complejos de signos son enunciados bien formados en **S**.
3. Una lista completa de aquellos enunciados bien formados en **S** que van a utilizarse como axiomas.

4. Una lista completa de las definiciones utilizadas.
5. Una exposición de las condiciones necesarias y suficientes que debe reunir una demostración, dando por resultado un teorema en **S**.
6. Una lista completa de las reglas de deducción en **S**, reglas que determinarán y limitarán los movimientos u operaciones a efectuar con los enunciados bien formados de **S**.
7. En el caso de que puedan utilizarse en **S** los teoremas de alguna otra rama de la lógica o la matemática, deberá haber una estipulación que así lo especifique.

Resumidamente expuesto diremos:

- a) Un **enunciado bien formado** en **S** es o un axioma o el último paso de una demostración, un teorema.
- b) Una **demostración** es una cadena de enunciados bien formados en **S**, cada uno de los cuales es un axioma o un enunciado obtenido correctamente mediante las reglas de derivación.

El sistema **S** así construido será **indecidible** si, y solo si, ninguno de los enunciados declarados como axiomas puede obtenerse como el último paso de una demostración a partir de los restantes axiomas del sistema.

El sistema **S** será **consistente internamente** si y solo si dos enunciados contradictorios (**e** y **no-e**, por ejemplo) no son teoremas en **S**, no pueden obtenerse ambos como teoremas.

El sistema **S** será **no contradictorio** si y solo si lo que afirma uno cualquiera de los enunciados declarados como axiomas no contradice lo que afirma ninguno de los restantes.

El objetivo básico del diseño de S es que sea completo, esto es, que cualquier enunciado bien formado en S sea un axioma o un teorema.

[regresar](#)

1.3. ¿Qué es la Metamatemática?:

Fruto del estudio de la axiomatización, y de las condiciones de construcción de una axiomática válida es una nueva rama de la lógica matemática: **La Metamatemática**.

La Metamatemática se ocupa de lo que en verdad puede afirmarse de un sistema deductivo o de un bloque de sistemas deductivos. Por ejemplo, de afirmaciones sobre la consistencia, no contradictoriedad, etc.

Si **S** es un sistema que versa sobre un determinado campo de investigación científica **C**, entonces el propósito de **S** es la construcción de un entramado de teoremas, deductivamente obtenibles, sobre **C**, que establecen qué relaciones se dan en verdad entre los objetos de **C**.

Si S es, por ejemplo, una aritmética, entonces, un enunciado como " $8 + 2 = 10$ " es un enunciado que se refiere a números, es decir, es un teorema de tal aritmética.

Por otro lado, un enunciado como este "el enunciado ' $8 + 2 = 10$ ' pertenece a S " no es un teorema de S , sino de la metamatemática S' de S .

Hay una diferencia clara entre S y S' . Todo sistema S tiene su metamatemática S' a la que comúnmente se llama "su lógica" y está integrada por los enunciados verdaderos, y los argumentos construidos a base de ellos, que pueden hacerse sobre S , mientras que S , a su vez, está integrado por los enunciados verdaderos, y los argumentos construidos a base de ellos, que puedan hacerse sobre C .

[\[Regresar\]](#)

2. LA CONCEPCION DE LA MATEMATICA:

Lo que caracteriza a la matemática es el proceso de extraer las consecuencias lógicamente implicadas en cualquier sistema de axiomas o postulados, así como la reformulación de los sistemas axiomáticos establecidos o la formulación de nuevos sistemas axiomáticos acordes con las necesidades de la investigación.

Los problemas que el desarrollo de la teoría del conocimiento plantea pueden o no ser resueltos con los sistemas axiomáticos existentes en el momento de ser planteados. La aparición de problemas no resolubles dentro de una determinada construcción es lo que impulsa a la revisión de los cimientos, de la axiomática, en un proceso epistemológico o de conocimiento hacia atrás. Esta revisión permitiría la reformulación del sistema de axiomas y, en consecuencia, la obtención de nuevos teoremas desde el sistema axiomático reformulado, en un nuevo paso de conocimiento hacia adelante. La repetición *ad infinitum* de estos procesos es, en esencia, el *quehacer matemático*.

Las consecuencias, proposiciones o teoremas, que en conjunto componen el cuerpo de doctrina obtenido desde una determinada construcción axiomática, constituye el avance hacia adelante, deductivo, de la ciencia matemática.

Pero este desarrollo continuo de la matemática hacia adelante y, por otra parte, la necesidad siempre latente de revisar sus fundamentos, plantea, en lo que se refiere a su enseñanza en el nivel medio, la necesidad de adoptar los nuevos enfoques de la disciplina a la previa formación de los alumnos, muy jóvenes, que cursan la Enseñanza Secundaria Obligatoria o el Bachillerato. Es preciso presentar la disciplina de forma que los alumnos del Bachillerato puedan introducirse de forma natural en los estudios universitarios y en la investigación.

Es por esta razón que el enseñante de la disciplina en el nivel medio debe, necesariamente, dominar los dos aspectos del quehacer matemático: la fundamentación axiomática de la disciplina, por una parte, y el contenido estructural del cuerpo de doctrina, por otra. Es decir, se trata de entender claramente tanto la cuestión de la fundamentación, como el manejo de las estructuras que constituyen los diferentes campos matemáticos.

Se hace, en definitiva, preciso, en el aspecto conceptual:

a) Entender definitivamente al método axiomático como base de cualquier construcción matemática. Aceptar el hecho de que la aparición de resultados paradójicos en cualquiera de sus ramas, como la teoría de conjuntos, ha obligado a fortalecer las condiciones de validez de los sistemas de axiomas, hasta, finalmente, establecer la incompletitud en la fundamentación de cualquiera de las construcciones de la disciplina, incompletitud descubierta y expuesta por Kurt Gödel en su memoria de 1931.

b) Establecer el contenido legaliforme de los procesos matemáticos y entender como las particulares propiedades de las leyes que rigen tales procesos permiten englobar a las entidades dotadas de leyes internas con

propiedades afines en estructuras homólogas, y a los procesos a desarrollar en cada estructura, en su correspondiente Algebra o Cálculo.

[\[Regresar\]](#)

3. LA ANTIGUA CONCEPCIÓN DE LA MATEMÁTICA:

La matemática ha sido considerada hasta el siglo XIX como una ciencia de medición de lo cuantitativo. Se la consideraba como la ciencia que pretende el conocimiento de una propiedad inherente a los fenómenos naturales: la cantidad.

Partiendo, en efecto, de un sistema de proposiciones postuladas como ciertas, a las cuales se les exigía en general autoevidencia, es decir, que fueran concordantes de forma inmediata con la realidad espacio-temporal, habría de ser posible formalizar, de forma lógica, las leyes de los fenómenos naturales.

Bastaba la autoevidencia de los sistemas de axiomas, en cualesquiera de las ramas de la disciplina, para afirmar su indecibilidad, consistencia y no contradictoriedad, o sea:

1. *No sería ningún axioma deducible de los demás*
2. *No se obtendrían teoremas contradictorios desde el bloque de los axiomas*
3. *La afirmación de un axioma no contradice lo afirmado por ninguno de los restantes axiomas.*

En resumen, la confianza en la fundamentación de cualquier rama matemática se establecía por la autoevidencia de cada uno de los axiomas del sistema que le servía de base. Esto ocurría, por ejemplo, con el sistema de axiomas que postuló Euclides para la construcción de sus Elementos de Geometría:

"I. Trazar una línea desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.

(Por dos puntos pasa una recta)

"II. Prolongar de manera ilimitada en línea recta una recta ilimitada."

(Una recta se puede prolongar indefinidamente)

"III. Describir un círculo para cada centro y cada radio."

(Por cada punto, y para cada longitud existe un círculo de centro el punto y de radio tal longitud)

"IV. Todos los ángulos rectos son iguales."

(Todo ángulo recto mide lo mismo, 90 grados)

"V. Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos."

(Si una recta corta a otras dos y no forma ángulo recto con ambas, las dos rectas se cortarán)

Este sistema axiomático habría de ser, con toda seguridad, consistente, no contradictorio e indecidible, en bloque, a causa de su aparente autoevidencia.

Con el sistema axiomático de Euclides se construyó la Geometría clásica hasta el siglo XIX, es decir, se desarrolló toda la Geometría plana y tridimensional que sirvió de base al desarrollo de la mecánica de Newton, de Lagrange, de Hamilton, etc. Es esta la Geometría "intuitiva", concordante con nuestra percepción de la realidad espacio-temporal. Es la Geometría que se enseña actualmente a los jóvenes en los niveles no universitarios de la Matemática, y es, finalmente, la geometría válida en nuestro entorno, en el entorno en el que se desarrolla la vida cotidiana.

[\[Regresar\]](#)

4. UNA ANTIGUA SOSPECHA:

Pero, como se observa, aunque las cuatro primeras proposiciones de Euclides parecen evidentes, no parece tan sencillo el quinto enunciado (históricamente llamado *Axioma de las paralelas*).

Ya desde los mismos tiempos de Euclides se dudó de la autoevidencia del quinto de los axiomas, del *Axioma de las paralelas*.

Fueron varias las razones por las que ya los griegos no consideraron autoevidente este axioma. En él se hablaba de rectas que se tocaban "en el infinito", pero ¿qué es el infinito?. Se hablaba de algo que ocurriría en regiones remotas del espacio, no abcesibles. Euclides define las líneas rectas como líneas situadas en un plano que, "prolongándose indefinidamente en ambas direcciones, no se encuentran". Por consiguiente, decir que dos líneas son paralelas es sentar la afirmación de que no se encontrarán ni siquiera "en el infinito". Pero los antiguos griegos conocían ya líneas que, aunque no se cortan en ninguna región finita del plano, se encuentran "en el infinito": las líneas asintóticas.

Esta y otras consideraciones hacían dudar de que fuera autoevidente el axioma.

Pero, si el quinto postulado no es autoevidente, ¿no será una proposición demostrable? ¿No pudiera haber sucedido que Euclides la incluyó como axioma sin haber comprobado que no podía obtenerse como un teorema?.

Sospechaban que pudiera ser una proposición decidible desde las otras cuatro del sistema axiomático de Euclides.

Esta sospecha de que el llamado *Axioma de las paralelas* pudiera obtenerse como un teorema desde el resto de los axiomas llevó a multitud de estudiosos de la matemática al intento de conseguir una demostración del mismo, a lo largo de más de dos mil años de trabajo, siempre infructuoso.

El fracaso de todos los intentos de demostrar este enunciado de las paralelas como un teorema a partir de los restantes cuatro axiomas euclidianos indujo a algunos matemáticos del siglo XIX a pensar en la posibilidad de que efectivamente es una proposición indecidible desde el resto de los axiomas y que, por consiguiente, si se sustituyera por otra proposición también indecidible, que no fuera contradictoria con ninguno de los otros cuatro axiomas podría, quizás, obtenerse un sistema axiomático distinto internamente consistente, es decir un sistema axiomático en el que no se obtendría nunca una contradicción como teorema. Se pensó, pues, en la posibilidad de construir otras geometrías, geometrías que serían no euclidianas.

[\[Regresar\]](#)

5. EL CAMBIO EN LA CONCEPCION DE LA MATEMATICA:

Se inició el trabajo de demostrar la imposibilidad de deducir de los otros axiomas el postulado quinto de Euclides, con lo que comenzó a tenerse una concepción nueva de la matemática:

a) El descubrimiento de que en matemática puede demostrarse la imposibilidad de demostrar.

b) El descubrimiento de que pueden construirse sistemas axiomáticos no necesariamente autoevidentes.

La creencia tradicional, pues, de que los axiomas de la geometría (o los axiomas de cualquier otra rama de la matemática) pueden ser establecidos por su aparente autoevidencia fue así destruída en su misma base. Además fue haciéndose cada vez más claro que la tarea propia del matemático puro es deducir teoremas a partir de hipótesis postuladas, y que desde el punto de vista de la matemática no le atañe la cuestión de si los axiomas de que parte son realmente verdaderos.

La modificación mencionada en la geometría ortodoxa estimularon la perfección y revisión de otros sistemas axiomáticos, dándose fundamento axiomático a campos de investigación que hasta entonces habían sido cultivados en forma parcialmente intuitiva, como la teoría de los números naturales, axiomatizada por Peano.

La conclusión dominante de todos estos acontecimientos es que la antigua concepción de la matemática como "ciencia de la cantidad" es equivocada, además de ser engañosa. Se hizo, en definitiva, evidente, que la matemática es la disciplina por excelencia que extrae las conclusiones lógicamente implicadas en cualquier sistema de axiomas o postulados. Se ha reconocido, incluso, que la validez de una demostración no depende en absoluto de ningún significado especial que pueda estar asociado con los términos o expresiones contenidos en los postulados. La matemática, pues, ha resultado ser algo mucho más abstracto y más formal de lo supuesto en la antigua concepción de la disciplina.

[\[Regresar\]](#)

6. EL PROBLEMA DE LA CONSISTENCIA INTERNA:

6.1. Naturaleza del problema:

El elegir una proposición indecidible en sustitución del quinto axioma de Euclides y que no contradiga a los restantes axiomas del sistema es inmediato, pero ¿cómo asegurarnos de que el nuevo sistema así construido es internamente consistente? ¿Cómo asegurarnos de que al introducir ese nuevo axioma en sustitución del de Euclides no se obtendría en el futuro una contradicción como teorema?

Se planteó, en definitiva, el problema de construir geometrías distintas de la de Euclides, geometrías que tuvieran como sistema axiomático base los cuatro primeros axiomas euclidianos más un quinto axioma sustitutivo del axioma de las paralelas. Todo dependía de que pudiéramos demostrar la consistencia interna de los nuevos sistemas axiomáticos así construidos.

Surgió así un acuciante problema: ¿cómo probar la consistencia interna de un sistema axiomático?. Este es el llamado *Problema de la consistencia interna*.

El fundamento de la confianza en la Geometría Euclidiana es el recto principio de que no pueden ser simultáneamente verdaderas afirmaciones lógicamente incompatibles. Por consiguiente, si es verdadero un conjunto de afirmaciones (que es lo que se daba por supuesto respecto de los axiomas de Euclides) estas afirmaciones son mutuamente consistentes.

Las Geometrías No Euclidianas, construidas modificando uno de los cinco axiomas de la Geometría de Euclides, pertenecen a una categoría diferente. Sus axiomas fueron considerados inicialmente como siendo claramente falsos respecto del espacio, y, por consiguiente, dudosamente verdaderos respecto de cualquier otra cosa.

Por ello fue considerablemente arduo, a la par que decisivo, el establecer la consistencia interna de los sistemas no euclidianos. La posibilidad de la misma existencia de estas geometrías pasó a depender de que se pudiera o no encontrar una prueba de la consistencia interna del sistema axiomático correspondiente.

[\[Regresar\]](#)

6.2. El método del modelo:

Fue ideado, en principio, un método general para la resolución del problema de la consistencia. La idea básica consistió en encontrar "un modelo" (o una "interpretación") para los postulados del sistema axiomático, de modo que cada postulado fuera una afirmación verdadera respecto de tal modelo.

El modelo respecto al cuál resulta válida la geometría euclídea es el espacio ordinario. Pero se trataba de encontrar otros modelos cuyos elementos

podieran servir de puntos de apoyo para determinar la consistencia de postulados abstractos.

La consistencia de la geometría riemmaniana, por ejemplo, quedará probada si se encuentra un modelo, de consistencia previamente probada, en el cuál puedan encarnar sus postulados. Interpretando la expresión "plano" de los axiomas riemmanianos por "esfera" euclidiana, el "punto de un plano" como "punto de una superficie esférica", la "línea recta" riemmaniana por el "arco de círculo máximo de la esfera" euclidiana, etc., se tiene que cada postulado de Riemman se traduce en un postulado de Euclides: así, por ejemplo, la interpretación del postulado riemmaniano de las paralelas es el siguiente enunciado: "por un punto de la superficie de una esfera no puede trazarse ningún arco de círculo máximo paralelo a un arco dado de círculo máximo". En este sentido, un modelo respecto del cuál es consistente la geometría de Riemman, resulta ser el sistema de Euclides.

Pero, aunque pueda parecer concluyente el método del modelo, resulta que con su utilización el problema no se resuelve, sino que se desplaza, al apelar a la consistencia previa de un modelo que, realmente, no ha sido probada. Se intenta, en el caso de la Geometría Riemmaniana, probar su consistencia apelando a la consistencia, no absolutamente probada, de la geometría euclidiana.

A la cuestión de si son o no consistentes los axiomas de la geometría euclidiana, se puede contestar que son consistentes por ser verdaderos respecto del modelo espacial, respecto del espacio. Pero esta respuesta no será absolutamente válida, puesto que subsiste la posibilidad de que un hecho o característica del espacio ordinario, hasta ahora inobservado, puede contradecir las hipótesis del sistema en un descubrimiento futuro.

De los axiomas de Euclides se puede afirmar que son probablemente consistentes, nunca que son absolutamente consistentes.

[\[Regresar\]](#)

6.3. Las pruebas absolutas de consistencia:

David Hilbert hizo un ensayo en una dirección diferente al "método del modelo". Se trataba de encontrar pruebas absolutas de consistencia de un sistema axiomático. Pruebas que no dieran por supuesta la consistencia de ningún modelo.

El primer paso en la construcción de una prueba absoluta, tal como concibió Hilbert el problema, es la formalización completa del sistema deductivo. La formalización completa, esto es, la extracción de todo significado de las expresiones existentes dentro del sistema. Se las deberá considerar, simplemente, como signos vacíos. La finalidad de esta formalización es construir un sistema de signos, un cálculo, que no oculte ninguna expresión y que solo contenga las expresiones del sistema. Los postulados y los teoremas serán "hileras" o sucesiones de longitud finita de tales signos carentes de significado; hileras construidas conforme a reglas establecidas

previamente para combinar los signos elementales el sistema para formar más amplios conjuntos.

Una vez formalizado el sistema, la derivación de teoremas queda limitada a la transformación de un conjunto de estas hileras en otro conjunto de hileras, siempre mediante las reglas aceptadas. La formalización completa del sistema muestra las relaciones lógicas estructurales de las diversas hileras de signos, cómo permanecen unidas, cómo se combinan, cómo se alojan una en otra, etc.. Resulta, pues, el diseño abstracto de un gran mosaico.

Las declaraciones acerca de las hileras de signos de un sistema formalizado completamente, de sus conexiones y propiedades, las llamó ya Hilbert *declaraciones metamatemáticas*. Es decir, la matemática será la formalización del sistema deductivo y la metamatemática es la lógica de esta formalización, o sea, la descripción de la matemática.

La construcción de una prueba absoluta queda, pues, basada en la distinción entre un cálculo formal y su descripción. El análisis consiste en anotar los diversos tipos de signos que se dan en un cálculo, indicar como combinarlos en fórmulas, prescribir cómo pueden obtenerse nuevas fórmulas a partir de otras y determinar si fórmulas de una determinada clase pueden derivarse de otras mediante reglas operativas explícitamente enunciadas. De esta forma sería posible, según Hilbert, presentar cualquier cálculo matemático como un esquema "geométrico" de fórmulas, interconectadas mediante un número finito de relaciones estructurales; sería, por consiguiente, posible, examinando exhaustivamente tales relaciones de estructura, demostrar que no pueden obtenerse fórmulas formalmente contradictorias a partir de los axiomas del cálculo.

El requisito esencial del procedimiento de Hilbert es que las demostraciones de consistencia no utilicen procesos que hicieran referencia a un número infinito de propiedades estructurales de fórmulas ni a un número infinito de operaciones con las fórmulas del cálculo. Tales procedimientos, llamados "finitistas", son los que permiten definir una prueba de consistencia como *absoluta*.

Una prueba absoluta podría establecerse, según Hilbert, utilizando un pequeño número de principios de deducción y sin presuponer la consistencia de ningún otro sistema axiomático.

Se han logrado pruebas absolutas de consistencia en algunas ramas de la matemática. Un ejemplo notable es la prueba absoluta de la consistencia de la lógica elemental de proposiciones.

[\[Regresar\]](#)

6.4. La consistencia de la lógica de proposiciones:

En un primer paso se formalizará el sistema, para conseguir, en un segundo paso, la demostración de que no es posible probar una contradicción como teorema.

La formalización de la lógica de proposiciones puede conseguirse en cuatro fases:

a) Preparación de un catálogo completo de signos que se han de dar en el cálculo.

b) Establecimiento de las *reglas de formación*, para construir la gramática del sistema. Estas reglas indicarán qué signos pueden ser aceptados como fórmulas.

c) Expresión de las *reglas de transformación* que describirán de manera precisa la forma de derivar teoremas.

d) Selección de algunas de las fórmulas como axiomas (son las "fórmulas primitivas" o postulados).

Puede obtenerse esto en varios pasos:

Primer paso: formalizar el sistema:

a) Signos del cálculo:

a.1) Variables:

- proposicionales (p, q, r, \dots), que representan enunciados verbales
- predicativas (P, Q, R, \dots), que representan predicados concretos.

a.2) Signos constantes, o *conectores* ($\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \dots$), que sirven para conectar las variables proposicionales.

b) Reglas de Formación:

b.1) Las fórmulas son las combinaciones de signos elementales.

b.2) Cada variable proposicional es también una fórmula.

b.3) El enlace mediante conectores proposicionales de cualesquiera fórmulas es también una fórmula.

c) Reglas de Transformación:

c.1) La Regla de Sustitución:

- De una fórmula que contenga variables proposicionales puede siempre derivarse otra fórmula sustituyendo uniformemente las variables con nuevas fórmulas.

c.2) La Regla de Separación:

- Dos fórmulas que tengan la forma

F₁

$$F_1 \text{ ---} \rightarrow F_2$$

derivan siempre la fórmula F_2 .

d) Los Axiomas:

Consideremos los cuatro axiomas que fueron expuestos por Russell y Whitehead en los "Principia Mathematica":

$$p \vee p \text{ ---} \rightarrow p$$

$$p \text{ ---} \rightarrow p \vee q$$

$$p \vee q \text{ ---} \rightarrow q \vee p$$

$$(p \text{ ---} \rightarrow q) \text{ ---} \rightarrow [(r \vee p) \text{ ---} \rightarrow (r \vee q)]$$

Segundo paso: Una propiedad general de sistema:

Hay una propiedad general que verifican las fórmulas del sistema axiomática definido para la lógica de proposiciones:

Si se pudiera deducir del sistema una fórmula F y su negación no-F , entonces se deduciría cualquier fórmula. Es decir, si el cálculo es inconsistente toda fórmula es un teorema.

En efecto: Sea el teorema $p \text{ ---} \rightarrow (\text{no-p} \text{ ---} \rightarrow q)$, fácilmente derivable de los axiomas. Sustituyendo la variable p por F será: $F \text{ ---} \rightarrow (\text{no-F} \text{ ---} \rightarrow q)$. A partir de aquí, y juntamente con F , que se ha supuesto demostrable, se obtiene por aplicación de la regla de separación:

$$\text{no-F} \text{ ---} \rightarrow q$$

y como no-F se supone también demostrable, aplicando nuevamente la regla de separación, se obtiene q .

Como q puede sustituirse por cualquier fórmula, por la regla de sustitución, resulta que toda fórmula es demostrable si el sistema no tiene consistencia interna: toda fórmula es teorema.

De este resultado se deduce que si se encontrara una fórmula no demostrable, entonces el sistema será consistente.

Si se demuestra, pues, la existencia de, al menos, una fórmula que no pueda ser deducible del sistema, el cálculo proposicional será consistente internamente, y tal prueba será absoluta, puesto que no presupone la consistencia de ningún otro sistema (modelo) y cumple los requisitos finitistas de Hilbert.

Tercer paso: Hay una fórmula no demostrable:

Tratemos de encontrar una propiedad de los axiomas del sistema que sea hereditaria a todos los teoremas. Bastará ver si una fórmula dada tiene esa propiedad para saber si es teorema o no lo es.

Lo que, en resumen, se precisaría, es encontrar una sola fórmula sin esa propiedad hereditaria. Hecho esto, la consistencia del sistema quedará probada.

Elijamos la propiedad de ser tautología. Definimos tautología, o proposición tautológica, como aquella que no excluye ninguna posibilidad lógica, o, dicho más intuitivamente, que sea necesariamente verdadera, independientemente de si lo son o no las variables proposicionales que figuran en su fórmula representativa.

Es inmediato que los cuatro axiomas antes enunciados son tautologías. Es decir, poseen tal propiedad. Y es fácilmente demostrable, asimismo, que la propiedad es hereditaria, o sea, que si los axiomas son tautología, también lo será cualquier fórmula derivada de ellos utilizando las reglas de separación y sustitución.

Ya solo falta encontrar una fórmula que no sea tautología. Bastaría, por ejemplo, la fórmula $p \vee q$. Esta fórmula no es tautología. No es cierta siempre, independientemente de los valores de las variables que intervienen en su expresión, p y q .

Luego, $p \vee q$ no es un teorema.

Por consiguiente, **la lógica de proposiciones es consistente.**

[\[Regresar\]](#)

7. CONSISTENCIA Y COMPLETITUD:

El cálculo proposicional, además de consistente es completo, entendiendo por sistema axiomático completo aquel desde el cuál sea posible la deducción de todos los teoremas correspondientes al campo matemático axiomatizado. Que el cálculo proposicional es completo exige una demostración metamatemática de gran prolijidad y, en definitiva, viene a manifestar que toda tautología es deducible del sistema axiomático. Toda verdad lógica es derivable de los axiomas del cálculo proposicional.

Admitida la completitud, resulta que el cálculo proposicional es un ejemplo de sistema en el cuál se han alcanzado plenamente los objetivos del programa de Hilbert.

Pero no ha ocurrido así con otras ramas importantes de la matemática.

No ha ocurrido esto, por ejemplo, con la Aritmética.

Resultaron infructuosos los intentos repetidos de construir una prueba absoluta de la consistencia y completitud de un sistema como los Principia Mathematica, cuyo vocabulario y aparato lógico permiten englobar toda la aritmética elemental.

La publicación en 1931 del trabajo "**Sobre las proposiciones formales no decidibles de los Principia Matemática y sistemas conexos**", de Kurt Gödel, demostró finalmente que tales intentos y los que se desarrollaran dentro de los límites estrictos del programa de Hilbert habían de fracasar.

Con respecto a la consistencia probó Gödel que es imposible presentar una prueba metamatemática de la consistencia de un sistema lo bastante comprensivo para abarcar la aritmética, a menos que en una tal prueba se empleen reglas de derivación diferentes a las reglas de transformación explicitadas en la formalización del sistema.

Con respecto a la consistencia probó Gödel que cualquier sistema (los Principia Mathematica, por ejemplo) capaz de contener el desarrollo de la aritmética, es esencialmente incompleto. O sea, que dado cualquier conjunto consistente de axiomas aritméticos, existen proposiciones aritméticas verdaderas que no son derivables de los axiomas del sistema. Es más, aún en el caso de que al sistema se le añadieran nuevos axiomas con los cuales pudieran demostrarse proposiciones hasta entonces no demostradas, la incompletitud subsistiría por la existencia de nuevos teoremas indecidibles.

[\[Regresar\]](#)

8. LAS PRUEBAS DE GÖDEL:

8.1. La idea de la representación:

Las pruebas de Gödel sobre la consistencia interna y completitud se basan en la idea de la representación, o sea, en la posibilidad de "representar" o "reflejar" declaraciones metamatemáticas acerca de un sistema formal dentro del sistema mismo.

La característica fundamental de la representación es la posibilidad de demostrar que una estructura abstracta de relaciones existente en un campo de "objetos" existe también entre "objetos pertenecientes a otro campo".

Esta característica permitiría, según Gödel, que complicadas proposiciones metamatemáticas acerca de un sistema formalizado de aritmética, pudieran ser traducidas, o, reflejadas, por proposiciones aritméticas contenidas dentro del propio sistema, lo cual facilitaría grandemente las proposiciones metamatemáticas. Pues, del mismo modo que resulta más sencillo el manejo de las fórmulas algebraicas que "reflejan" relaciones geométricas complicadas entre curvas y superficies del espacio ordinario, también sería, según Gödel, más fácil, manejar las contrapartidas aritméticas ("imágenes reflejadas") de complejas relaciones lógicas que el tratamiento de las relaciones lógicas mismas.

La explotación de la idea de la representación es la clave de la investigación de Gödel. Probó en primer lugar que las proposiciones metamatemáticas acerca de un cálculo aritmético formalizado, pueden, en forma efectiva, ser representadas por fórmulas aritméticas dentro del cálculo.

El segundo paso consistió en idear un método de representación tal que permitió demostrar que ni la fórmula aritmética correspondiente a una determinada proposición metamatemática verdadera acerca de la fórmula, ni la fórmula aritmética correspondiente a la negación de la proposición, son demostrables dentro del cálculo.

Como quiera que una de las dos fórmulas sirve para codificar una verdad aritmética, y ninguna de las dos es derivable de los axiomas, el sistema es incompleto.

Estas conclusiones aparecieron mediante un método de representación sumamente ingenioso, la llamada "numeración Gödel", y una aplicación bastante afortunada de tal método: la aritmetización de la metamatemática.

Se describe a continuación el proceso, en varias fases que van desde la simbolización numérica Gödel hasta la demostración de la imposibilidad de probar la consistencia de la aritmética mediante un proceso finitista.

[\[Regresar\]](#)

8.2. Números Gödel:

El procedimiento de representación (los "números Gödel") consiste en la asignación de un número entero positivo arbitrario a cada uno de los símbolos no redundantes que integran cualquier fórmula del cálculo.

El número Gödel asignable a una fórmula del sistema es el número cuya descomposición primaria son las potencias de los primeros números primos en orden correlativo, en un número igual al número de símbolos integrantes de la fórmula, y cuyos exponentes son los números Gödel de los símbolos respectivos siguiendo el orden de colocación en la fórmula.

En su trabajo de 1931, Gödel optó por la siguiente simbolización para el vocabulario fundamental (signos constantes, variables numéricas, variables proposicionales y variables predicativas):

Signo constante----- numero Gödel----- significado

~ -----1----- "no"

v -----2----- "o"

→ -----3----- "implica"

∃ -----4----- "existe un"

≡ -----5----- "igual"

0 -----6----- "cero"

s -----7----- "siguiente"

(-----8----- (signo de apertura de paréntesis)

) -----9----- (signo de cierre de paréntesis)

, -----10----- "coma"

variables numéricas----- numero -----variables proposicionales-----
numero

x -----11----- p -----11²

y -----13----- q -----13²

z -----17----- r -----17²

.....

variables predicativas----- numero

P----- 11³

$$\underline{Q \text{ ----- } 13^3}$$

$$\underline{R \text{ ----- } 17^3}$$

.....

-

El número Gödel asignable, por ejemplo, a la fórmula

$$(\$x)(x = sy)$$

sería, según esto:

$$2^8 \times 3^4 \times 5^{11} \times 7^9 \times 11^8 \times 13^{11} \times 17^5 \times 19^7 \times 23^{13} \times 29^9 = 14566649 \times 10^{79}$$

Para asignarle, a partir de esto, un número Gödel a cualquier otro signo que no aparezca en el vocabulario fundamental expuesto más arriba, será preciso definirlo con la ayuda de los signos ya enumerados. En este sentido, Gödel probó previamente la suficiencia de los diez signos constantes más arriba enumerados, para definir cualquier otro signo constante que pudiera aparecer en el vocabulario lógico. Así, por ejemplo, la conjunción " $p \ \& \ q$ " queda definida por la expresión " $\sim (\sim p \vee \sim q)$ ".

El número Gödel asociado a una sucesión de fórmulas se obtendrá a partir de los números Gödel de cada fórmula de la sucesión por igual procedimiento que el número Gödel de cada una de las fórmulas. Es decir, si n_1, n_2, \dots, n_k , son los números Gödel de las k fórmulas de una sucesión $_$, el número Gödel de $_$ será:

$$n_ = 2^{n_1} \times 3^{n_2} \times \dots \times p_k$$

(p_k es el primo de lugar k)

Se tiene, en resumen, que toda expresión contenida en el sistema, ya sea un signo constante, una variable, una fórmula o una cadena de fórmulas, tiene su correspondiente número entero definitorio. Su número Gödel.

No todo número entero es un número Gödel. Solo aquellos que admiten una descomposición en potencias de primos sucesivos desde el 2. No son números Gödel los siguientes:

$$10 = 2 \times 5, 100 = 2^2 \times 5^2; 27 = 3^3; 15 = 3 \times 5; \dots$$

El método de representación por los números Gödel establece una correspondencia biunívoca, por tanto, entre las expresiones del cálculo formalizado y una subclase del anillo de los números enteros. Dado un número entero m , de la subclase Gödel, puede ser descompuesto en factores primarios, y, desde esta expresión, obtener una única fórmula del cálculo. Recíprocamente, toda fórmula admite un único número Gödel.

[\[Regresar\]](#)

8.3. Aritmetizar la Metamatemática:

Una vez construido el vocabulario dado por los números Gödel, aparece el segundo paso del proceso: la aritmetización de la metamatemática.

La idea básica es que, puesto que toda expresión del cálculo está asociada a un número (su número Gödel), podrá construirse una proposición metamatemática acerca de las expresiones y de sus recíprocas relaciones como una proposición acerca de los correspondientes números Gödel y de sus recíprocas relaciones aritméticas.

La exploración de las cuestiones metamatemáticas puede ser desarrollada, pues, investigando las propiedades aritméticas y las relaciones de ciertos números enteros. Así, por ejemplo, dadas las fórmulas del cálculo, **F** y **M**, la proposición metamatemática "la fórmula **F** es una parte inicial de la fórmula **M**", equivaldrá, en la representación aritmetizada, a la proposición "el número Gödel de **F** es un factor del número Gödel de **M**". O sea, ambas proposiciones son ciertas o falsas simultáneamente.

Asimismo, la proposición metamatemática "la sucesión de fórmulas con número de Gödel **x** es una prueba de la fórmula con número de Gödel **z**" queda definida en la representación aritmetizada por una relación numérica entre **x** y **z**. Sea **Dem(x,z)** esta relación. Para establecer la verdad o falsedad de tal proposición matemática bastará ver si se cumple la relación **Dem(x,z)** entre los números Gödel **x** (de la prueba) y **z** (de la conclusión). Análogamente será $\sim\text{Dem}(x,z)$ la relación aritmética equivalente a "la sucesión de fórmulas con número Gödel **x** no es una prueba de la fórmula con número de Gödel **z**".

Se emplea, además, la notación aritmética indicada por **Sust(m,k,m)** para designar matemáticamente "el número Gödel de la fórmula obtenida a partir de la fórmula de número de Gödel **m**, sustituyendo en ella la variable de número Gödel **k** por el numeral de **m**".

[\[Regresar\]](#)

8.4. La fórmula G. Demostrabilidad de G:

A partir de la aritmetización, el siguiente paso de la argumentación de Gödel es construir la fórmula llamada **G**.

Tal fórmula se construye de modo que sea la representación aritmética de la proposición metamatemática "la fórmula **G** no es demostrable".

Se parte de la fórmula:

$(\forall x)(\sim\text{Dem}(x,z))$

o sea: "para todo **x**, la sucesión de fórmulas con número de Gödel **x** no es una prueba de la fórmula con número de Gödel **z**". O bien, "la fórmula de número Gödel **z** no es demostrable".

Un caso particular de tal fórmula sería:

$$(\forall x)(\sim \text{Dem}(x, \text{sust}(y, k, y)))$$

donde, como ya se señaló antes, $\text{sust}(y, k, y)$ representa un número Gödel. Por lo cual la fórmula quiere decir "la fórmula de número Gödel $\text{sust}(y, k, y)$ no es demostrable".

Ahora bien, la fórmula

$$(\forall x)(\sim \text{Dem}(x, \text{sust}(y, k, y)))$$

por pertenecer al cálculo aritmético tendrá un número Gödel n que puede de forma efectiva circularse. Si se sustituye en ella y por el numeral de n :

$$(\forall x)(\sim \text{Dem}(x, \text{sust}(n, k, n)))$$

Esta es la fórmula G que se quería construir. El número Gödel es, evidentemente, el número Gödel simbolizado por $\text{Sust}(n, k, n)$, por propia definición, luego, la fórmula G expresa la proposición metamatemática:

"la fórmula $(\forall x)(\sim \text{Dem}(x, \text{sust}(n, k, n)))$ no es demostrable"

Es decir, la fórmula G afirma de sí misma que no es demostrable.

[\[Regresar\]](#)

8.5. El descubrimiento de la incompletitud:

El siguiente paso en el proceso argumentativo es probar que si G es demostrable, entonces su contradictoria $\sim G$ es también demostrable.

Es decir, si es demostrable la fórmula

$$(\forall x)(\sim \text{Dem}(x, \text{sust}(n, k, n)))$$

también será demostrable la fórmula

$$\sim (\forall x)(\sim \text{Dem}(x, \text{sust}(n, k, n)))$$

e, inversamente, si $\sim G$ es demostrable, también lo sería G .

El esbozo de la primera parte de esta demostración es sencillo. Suponiendo G demostrable habría una sucesión de fórmulas aritméticas que constituyen una prueba de G . Sea I el número Gödel de tal prueba. En consecuencia, la relación aritmética $\text{Dem}(x, z)$ debe mantenerse entre I (número de Gödel de la prueba) y el número $\text{Sust}(n, k, n)$ (número de Gödel de G). O sea, $\text{Dem}(I, \text{Sust}(n, k, n))$ debe ser fórmula aritmética verdadera. Sin embargo, puede probarse que esta relación aritmética es de un tipo tal que, si dicha relación se da entre un par definido de números, la fórmula que exprese este hecho es demostrable.

O sea, **Dem(I, Sust(n,k,n))** es un teorema.

Ahora bien, las reglas de transformación de la lógica elemental permiten fácilmente derivar de este teorema la fórmula

$$\sim(\forall x)(\sim\text{Dem}(x, \text{Sust}(n,k,n)))$$

El camino por el cual supuesta la demostración de que $\sim\mathbf{G}$ se implica la demostración de \mathbf{G} es, en cierta medida, análogo.

Por tanto, las fórmulas \mathbf{G} y su negación $\sim\mathbf{G}$ son ambas demostrables, o bien, ambas no demostrable.

Ahora bien, \mathbf{G} es fórmula verdadera. Mediante el argumento metamatemático que Gödel expone en su trabajo de 1931, que se resume así:

En primer lugar, bajo la hipótesis de que la aritmética es consistente se ha demostrado la verdad de la proposición metamatemática

($\exists x)(\sim\text{Dem}(x, \text{Sust}(n,k,n)))$ no es demostrable

En segundo lugar, hay que notar que tal proposición se halla expresada en la aritmética por la misma fórmula que se menciona en la proposición.

Y puesto que las proposiciones metamatemáticas se han aritmetizado de tal modo que las proposiciones metamatemáticas verdaderas se correspondan con fórmulas aritméticas verdaderas, se desprende que la fórmula \mathbf{G} se corresponde con una proposición metamatemática verdadera.

Tal verdad aritmética no ha sido derivada de los axiomas del sistema, sino que ha sido construida metamatemáticamente.

Se obtiene, en definitiva, de los pasos anteriores, que, si los axiomas de la aritmética son consistentes, existe una fórmula \mathbf{G} tal que ni ella ni su negación $\sim\mathbf{G}$ son demostrables. Por tanto, la axiomatización es incompleta. Serán, además, esencialmente incompletos los axiomas aritméticos, puesto que aún cuando \mathbf{G} fuera introducida como un nuevo axioma añadido a los demás, aún podría construirse una fórmula aritmética verdadera pero indecidible, dentro del ampliado sistema axiomático. Bastaría para ello repetir los pasos anteriores dados en la construcción de \mathbf{G} .

La otra posibilidad, naturalmente, es que ambas fórmulas, \mathbf{G} , y su negación, $\sim\mathbf{G}$, fueran ambas demostrables. O sea, que la aritmética fuera inconsistente.

El siguiente paso en el esquema argumentativo de Gödel ha de ser, por tanto, tratar de resolver la disyuntiva anterior. Para ello habría que intentar dilucidar la posible consistencia de la aritmética.

Bastaría construir una fórmula aritmética, \mathbf{A} , debe representar la proposición "**existe una fórmula aritmética que no es demostrable**". Tal fórmula \mathbf{A} puede simbolizarse por

$$(\exists y)(\exists x)(\sim\text{Dem}(x,y))$$

o sea, **A** dice: "existe un número Gödel y tal que para todo número Gödel x , x no se mantiene en la relación $\text{Dem}(x,y)$ ", o bien: "existe al menos una fórmula aritmética para la cual ninguna sucesión de fórmulas aritméticas constituye una prueba"

Esta fórmula **A** representa, pues, la consistencia de la aritmética; y la proposición enunciada en el paso anterior "si la aritmética es consistente, entonces es incompleta", sería reflejada por $A \dashv\vdash G$:

$$(\exists y)(\forall x)(\sim \text{Dem}(x,y)) \dashv\vdash (\forall x)(\sim \text{Dem}(x, \text{Sust}(n,k,n)))$$

Finalmente, puede probarse que la fórmula **A**:

$$(\exists y)(\forall x)(\sim \text{Dem}(x,y))$$

no es demostrable, pues, si lo fuese, y teniendo en cuenta que $A \dashv\vdash G$ es demostrable, se tendrían como demostrables las fórmulas **A** y $A \dashv\vdash G$, de lo cual, y por la regla de separación, sería demostrable **G**. O sea, el cálculo sería inconsistente.

En definitiva:

a) Si la aritmética es consistente, entonces es esencialmente incompleta.

b) Si la aritmética es consistente, su consistencia no puede probarse por ningún razonamiento metamatemático susceptible de ser representado dentro del formalismo de la aritmética.

[\[Regresar\]](#)

9. LAS LIMITACIONES DEL METODO AXIOMATICO:

Las fuertes limitaciones que para el método axiomático clásico representan las pruebas expuestas hasta aquí se condensan en el enunciado del **Teorema Gödel**:

"1. Ningún sistema deductivo lo suficientemente amplio para englobar a la aritmética elemental admite una prueba absoluta de su consistencia interna.

2. Caso de que un tal sistema deductivo fuera consistente, entonces sería esencialmente incompleto."

Se ha visto antes que es posible para el cálculo de proposiciones construir una prueba finitista (una prueba absoluta) de su consistencia interna. Pero el tal cálculo de proposiciones no abarca la aritmética. Por otra parte, ningún sistema formal, con prueba finitista o sin ella, es completo. Siempre habrá teoremas que no puedan probarse ni desaprobarse dentro del sistema.

En la aritmética existen fórmulas cuya demostración de verdad o falsedad no ha sido probada (recuérdese el "último teorema de Fermat" o la "conjetura de Golbach"). Estas fórmulas ¿no han dilucidadas porque a nadie se le ha ocurrido una forma ingeniosa de manejar las reglas de derivación en el sistema aritmético, o quizá no han sido probadas ni desaprobadas sencillamente porque es imposible?.

Pueden establecerse, en conclusión, dos tipos de limitaciones:

Que el método axiomático no permite construir una prueba de la consistencia de ninguna axiomática expresable dentro de ella, por lo menos si tal axiomática engloba a la aritmética, quiere decir que la matemática, en bloque, no admite una prueba absoluta de su consistencia interna. Es decir, es imposible demostrar matemáticamente que la matemática es consistente.

Que todo sistema que asimile a la aritmética es incompleto quiere decir que toda la matemática en bloque es incompleta. O sea, que siempre existirán teoremas que no se puedan probar ni desaprobar dentro de la matemática. Que siempre será preciso modificar de algún modo los sistemas axiomáticos en busca de una completitud fatalmente inalcanzable. Que nunca, en definitiva, se agotará el conocimiento matemático.

[\[Regresar\]](#)

10. BIBLIOGRAFIA:

ACKERMAN: "Zur axiomatik der Mengenlehre", Mathematischen Annalen, 1956

BERNAYS: "Axiomatic Set Theory", Amsterdam, 1958.

BONOLA: "Geometrias No-Euclidianas", Espas-Calpe, Madrid, 1977.

EUCLIDES: "Elementos de Geometria" ("Científicos Griegos", página 702 y siguientes del tomo I), Ediciones Aguilar, Madrid, 1974.

GODEL, K.: "Uber formal Unentscheidbare Satze der Principia Mathematica und verwandter System I", Monatshefte fur Mathematik und Physik, Vol 38 (1931), pags 173-198.

LADRIERE: "Limitaciones internas de los formalismos", Ed.Tecnos, Madrid, 1977

NIDDITCH, P.H.: "El desarrollo de la lógica matemática", Ed. Catedra, Madrid, 1987.