SOBRE EL CAMPO GRAVITATORIO

1. El campo gravitatorio:

Definimos el campo por su cuadripotencial y por la densidad de acción en vacío.

Un campo gravitatorio se define por la condición de que el cuadripotencial viene dado por los valores $A_1=A_2=A_3=0$ y $A_4= i\frac{m}{e}\phi$, es decir, de potencial vectorial nulo:

$$\vec{A} = \vec{0} \qquad\qquad A_4 = i\frac{m}{e}\phi .$$

y su densidad de acción en vacío es proporcional a la curvatura escalar de Riemann:

$$U = \frac{c^3}{16\pi.k}.R\sqrt{-g}$$

k es una constante llamada *constante gravitatoria, R* es la curvatura escalar de Riemann, y g es el determinante de la matriz métrica, uno de los tensores característicos.

El tensor mecánico

$$\chi = .\left[\frac{\sqrt{-\delta_{rx}.dx_r.dx_s}}{A_k.dx_k} - \frac{e}{m.c^2}\right]$$

2. Intervalo y acción:

El intervalo será:

$$ds = \chi(A_j dx_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ds = \left[\frac{\sqrt{-\delta_{rx}.dx_r.dx_s}}{A_j.dx_j} - \frac{e}{m.c^2}\right].(A_j.dx_j) = \sqrt{-\delta_{rx}.dx_r.dx_s} - \frac{e}{m.c^2}(A_j.dx_j)$$

y siendo $A_j.dx_j = A_4.dx_4 = i\frac{m}{e}.\phi.i.c.dt = -\frac{m\phi c}{e}.dt$, queda, al sustituir:

$$\Rightarrow ds = \sqrt{-\delta_{rx}.dx_r.dx_s} - \frac{e}{m.c^2}(-\frac{mc\phi}{e}dt) = \sqrt{-r^2 + c^2.dt^2} + \frac{\phi}{.c}dt$$

por tanto, la expresión del intervalo en el campo gravitatorio es:

$$ds = \sqrt{c^2 - v^2}.dt + \frac{\phi}{.c}dt = \left(\sqrt{c^2 - v^2} + \frac{\phi}{.c}\right)dt$$

La acción campo-materia se define por la expresión:

$$S_p = -m.c\int ds$$

Por tanto, es:

$$S_p = -m.c\int ds = -mc\int\left(\sqrt{-dr^2 + c^2.dt^2} + \frac{1}{c}\phi.dt)\right) = -mc\int\left(\sqrt{-\frac{dr^2}{dt^2} + c^2} + \frac{1}{c}\phi\right).dt$$

$$S_p = -mc^2\int\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{1}{c^2}\phi.)\right).dt$$

La acción total es la suma de la acción en el vacío con la acción campo-materia. En el caso del campo gravitatorio, la acción en vacío viene dada por la integral de volumen:

$$S_v = \int_\Omega U.d\Omega = \frac{c^3}{16\pi k}\int_\Omega R.\sqrt{-g}.d\Omega$$

con lo cual se obtiene para la acción total:

$$S = S_p + S_v = -mc^2\int\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{1}{c^2}\phi.)\right).dt + \frac{c^3}{16.\pi.k}\int R.\sqrt{-g}.d\Omega$$

3. Funciones de Lagrange y de Hamilton:

La función de Lagrange, la lagrangiana L de una partícula en un campo físico, viene relacionada con la acción campo-materia por la expresión $S_p = \int L.dt$, por lo cual, en el campo gravitatorio se tiene:

$$S_p = \int L.dt = -mc^2 \int \left(\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} + \frac{1}{c^2}\phi.) \right).dt = \int \left(-mc^2 .\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - m\phi.) \right).dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = mc^2 .\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - m\phi.$$

En cuanto a la función H de Hamilton o hamiltoniana:

$$H = \bar{v}.\frac{\partial L}{\partial \bar{v}} - L = \bar{v}.\frac{\partial\left(-m.c^2 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - m\phi. \right)}{\partial \bar{v}} - \left(-m.c^2 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - m\phi. \right) =$$

$$= \bar{v}.\left(\frac{m.\bar{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \right) - \left(-m.c^2 \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} - m\phi. \right) = \frac{m.c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + m\phi$$

4. Cuadrimpulso. Impulso y energía:

Como sabemos, se puede definir el cuadrimpulso por el cuadrivector de componentes las derivadas parciales de la acción campo-materia:

$$p = \left(\frac{\partial S_p}{\partial x_1}, \frac{\partial S_p}{\partial x_2}, \frac{\partial S_p}{\partial x_3}, \frac{\partial S_p}{\partial x_4} \right)$$

y resultan:

$$p_1 = \frac{\partial S_p}{\partial x_1} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.\frac{dx_1}{dt}$$

$$p_2 = \frac{\partial S_p}{\partial x_2} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.\frac{dx_2}{dt}$$

$$p_3 = \frac{\partial S_p}{\partial x_3} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.\frac{dx_3}{dt}$$

$$p_4 = \frac{\partial S_p}{\partial x_4} = i\frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + i\frac{m}{c}\phi$$

Como sabemos las tres primeras componentes definen el vector impulso del campo, y la cuarta componente, multiplicada por -ic nos da la energía total:

Impulso:

$$\vec{p} = \left(\frac{\partial S_p}{\partial x_1}, \frac{\partial S_p}{\partial x_2}, \frac{\partial S_p}{\partial x_3}\right) = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}\right) = \frac{m.\vec{v}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Energía:

$$E_t = -i.c.\frac{\partial S_p}{\partial x_4} = \frac{m.c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + m\phi$$

(coincide, por tanto, con la expresión de la hamiltoniana)

Siendo la fuerza actuante sobre una masa m: $\vec{f} = -m.\vec{\nabla}\phi$, se tiene.

Para la energía potencial correspondiente:

$$E_p = -\int \vec{f}.d\vec{r} = -\int (-m.\vec{\nabla}\phi).d\vec{r} = m.\int \vec{\nabla}\phi.d\vec{r} = m\int d\phi = m\phi$$

Y puesto que la energía total viene dada por

$$E_t = \frac{m.c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} + m\phi$$

Y la energía cinética es la diferencia:

$$E_c = \frac{m..c^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Si llamamos $m_0 = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

Se tienen:

$$E_t = m_0.c^2 + m\phi, \quad E_c = m_0.c^2, \quad E_p = m.\phi$$

5. Momento cinético:

Por definición, es

$$\vec{M} = \vec{p}x\vec{r} = \left(\begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_3 & p_1 \\ x_3 & x_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \right) = \left(p_2x_3 - p_3x_2, p_3x_1 - p_1x_3, p_1x_2 - p_2x_1 \right)$$

En definitiva:

$$\vec{M} = \frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}.(\vec{v}x\vec{r})$$

6. El tensor de energía-impulso:

Sabemos que existe un tensor que resulta invariante en una variación virtual de la acción total del campo cuando se produce una variación lineal de las coordenadas generalizadas de una partícula inmersa en el mismo, de la forma $x'_l = x_l + \delta x_l$. Esta magnitud es el tensor de energía-impulso del campo, Y_{jk}, y a partir de él pueden obtenerse también las componentes de cuadrimpulso, esto es, el vector impulso y la energía total, que aquí hemos obtenido, en el apartado 4, derivando parcialmente la acción campo-materia. Las expresiones de las componentes del cuadrimpulso, desde el tensor de energía-impulso, serían:

$$p_j = -\frac{i}{c}\int Y_{jk}.dS_k$$

(j=1,2,3,4- i es la unidad imag.)

La expresión del tensor de energía-impulso es:

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\phi}.Y_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{-\phi}.\Delta\right)}{\partial\left(\frac{\partial\phi^{jk}}{\partial x_m}\right)}\right) - \frac{\partial}{\partial\phi^{jk}}\left(\sqrt{-\phi}\Delta\right)$$

donde es $-\phi$ el determinante del tensor métrico, y las ϕ^{jk} son las componentes contravariantes del tensor métrico. Λ es el término que aparecen en la expresión de la densidad de lagrangiana.

7. Ecuaciones del campo gravitatorio:

Partimos, para obtener las ecuaciones del campo, del principio de mínima acción total:

$$\delta S = \delta(S_p + S_v) = \delta S_p + \delta S_v = \delta(-\frac{1}{c}\int\sqrt{-g}\,\Lambda d\Omega) + \delta(\frac{c^3}{16\pi k}\int R\sqrt{-g}.d\Omega)$$

Veamos por separado la variación virtual de cada una de estas integrales:

La primera puede expresarse, como ya sabemos del estudio general de un campo físico, en función del tensor de energia-impulso:

$$\delta\left(-\frac{1}{c}\int\sqrt{-g}\,\Lambda d\Omega\right) = -\frac{1}{2}.c\int \chi_{jk}\delta g^{jk}\sqrt{-g}.d\Omega$$

(χ_{jk} es el tensor de Energia-Impulso del campo gravitatorio)

Desarrollamos a continuación la variación virtual de la segunda integral:

$$\delta\left(\frac{c^3}{16\pi k}\right) = \frac{c^3}{16\pi k}\delta\int g^{jk} R_{jk}\sqrt{-g}d\Omega =$$

$$= \frac{c^3}{16\pi k}\int\left[R_{jkdelta}\, g^{jk}\sqrt{-g} + R_{jk}\, g^{jk}\,\delta\sqrt{-g} + g^{jk}\,\delta R_{jk}\sqrt{-g}\right]d\Omega =$$

$$= \frac{c^3}{16\pi k}\int\left[R_{jk}\, g^{jk}\sqrt{-g} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}\, g_{jk}\,\delta g^{jk} g^{jk} R_{jk} + g^{jk}\,\delta R_{jk}\sqrt{-g}\right]d\Omega =$$

$$= \frac{c^3}{16\pi k}\int\left[R_{jk} - \frac{1}{2}g_{jk} R\right]\delta g^{jk}\sqrt{-g}d\Omega$$

(Se ha utilizado la expresión: $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}g_{jk}.g^{jk}$)

En definitiva, se tiene, para la suma de ambas integrales:

$$\delta S = -\frac{1}{2c}\int[\chi_{jk}\delta g^{jk}\sqrt{-g}]d\Omega + \frac{c^3}{16\pi k}\int[R_{jk} - \frac{1}{2}g_{jk} R]\sqrt{-g}\delta g^{jk} d\Omega =$$

$$= \frac{c^3}{16\pi k}\int\left(-\frac{8\pi k}{C^4}\chi_{jk} + R_{jk} - \frac{1}{2}g_{jk} R\right).\sqrt{-g}\delta g^{jk} d\Omega = 0$$

De lo cual, al identificar el integrando a cero, se obtienen ya las ecuaciones tensoriales buscadas para este campo físico:

$$R_{jk} - \frac{1}{2} g_{jk} R = \frac{8\pi k}{c^4} \chi_{jk}$$

$$(j,k = 1,2,3,4)$$

Que son las *ecuaciones del campo gravitatorio,* en la forma deducida por A. Einstein a principios del siglo XX.

Referencia:

LANDAU, L.D.; LIFSHITZ, E.M., Teoría Clásica de los Campos, Ed. Reverté, Barcelona, 1966