# GEOMETRÍA FRACTAL. NOCIONES BÁSICAS

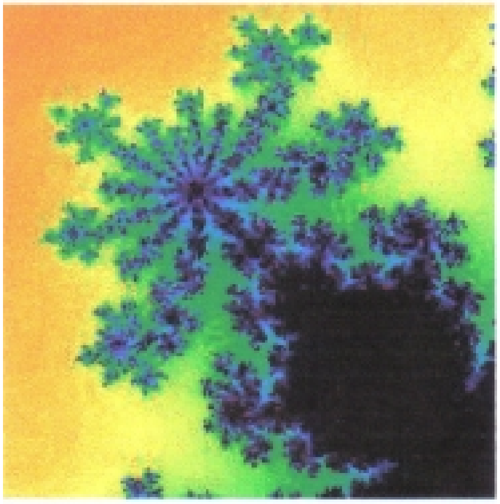
## INTRODUCCIÓN

El término **fractal** fue acuñado en 1.977 por Benoît Mandelbrot (Pan de almendra en alemán) para designar ciertas realidades matemáticas con propiedades contrarias a la intuición y antagónicas a las de las variedades regulares estudiadas por la Geometría Diferencial.

No existe una definición rigurosa que delimite con precisión matemática si un determinado conjunto es o no un **FRACTAL**. No obstante, la mayoría de los autores coinciden en considerar que un fractal es el producto final que se origina a través de la iteración de un proceso geométrico. Éste suele ser de naturaleza muy simple y origina en las sucesivas iteraciones conjuntos de determinada dimensión, fija a lo largo del proceso que se modifica al convertir la iteración en infinita.

**FRACTAL** es un objeto geométrico de estructura irregular aparentemente caótica. Mandelbrot observó que estos objetos estaban presentes en muchos procesos y formas de la naturaleza:

Procesos de separación de fronteras de dos medios
Procesos de ramificación
Procesos de formación de prosidad



## ETIMOLOGÍA DE LA PALABRA FRACTAL

El matemático francés BENOÎT MANDELBROT acuñó la palabra fractal en la década de los 70, derivándola del adjetivo latín **fractu**s. El correspondiente verbo latino, **fractu**s, significa romper, crear fragmentos irregulares.

## BREVE RESEÑA HISTÓRICA

Los fractales fueron concebidos aproximadamente en 1.890 por el francés HENRI PONCARÉ. Sus ideas fueron extendidas más tarde fundamentalmente por dos matemáticos también franceses, Gaston Julia y Pierre Fatou, hacia 1.918. Se trabajó mucho en este campo durante varios años, pero el estudio quedó congelado en los años 20. El estudio fue renovado a partir de 1974 en IBM y fue fuertemente impulsado por el desarrollo de la computadora digital. El Doctor Mandelbrot, de la Universidad de Yale, con sus experimentos de computadora, es considerado como el padre de la

**GEOMETRÍA FRACTAL**. En honor a él, uno de los conjuntos que él investigó fue nombrado en su nombre.

## GEOMETRÍA FRACTAL Y DIFERENCIAL

La Geometría Diferencial estudia las formas geométricas llamadas variedades diferenciales. Estas variedades tienen la característica de que ”miradas en pequeño” son lisas, por ejemplo, una curva diferenciable, localmente se comporta como una recta. La expresión ”miradas en pequeño” se determina por la precisión de los instrumentos de medida y por el interés del observador.

La Geometría Diferencial estudia las variedades de una forma local, pro lo que se pierde la visión global del conjunto.

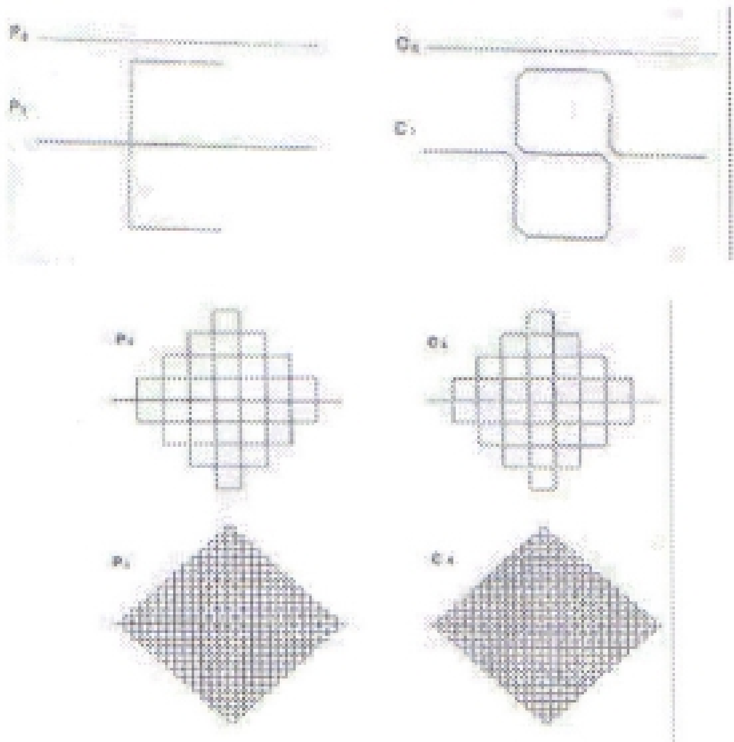
La Geometría Fractal busca una regularidad en la relación de un objeto y sus partes a diferentes escalas, es decir, estudia aspectos geométricos que son invariantes con el cambio de escala. Dicho de otra forma, la Geometría Fractal aborda el estudio de formas geométricas no diferenciables o ”quebradas” a cualquier escala que se miran.

## EJEMPLOS INTRODUCTORIOS

### CURVA DE PEANO (1890)

Partimos de un intervalo de longitud 1, $[0, 1] \times \langle 0 \rangle$ en $\mathbb{R}^2$, al que llamamos $P_0$ y $C_0$ indistintamente, con un parámetro que lo recorra de izquierda a derecha. $P_0$ lo transformamos en una línea $P_1$ formada por 9 intervalos de longitud $\frac{1}{3}$.

El primero de éstos es el primer tercio de $P_0$; a continuación se gira a la derecha $90^0$ y se avanza a la misma distancia, repitiendo el proceso 3 veces hacia la izquierda, otras 3 a la derecha y una última a la izquierda. El último coincide con el último tercio de $P_0$ .



La curva límite de la sucesión $C_n$ es la CURVA DE PEANO.

**PROPIEDADES**
- Las curvas $C_n$ no pasan dos veces por el mismo punto.
- La Curva de Peano es continua y converge uniformemente.
- Tenemos un conjunto de dimensión 2 parametrizable utilizando un único parámetro.
- Las $C_n$ son inyectivas, entonces cada una de ellas, es homeomorfa a un intervalo y sin embargo, su límite es de una dimensión superior. Este aumento de dimensión al pasar al límite sitúa a la Curva de Peano en el contexto de la Geometría Fractal.

## CONJUNTO DE CANTOR

El proceso geométrico que define el Conjunto de Cantor consiste en dividir un segmento en 3 partes iguales y suprimir la central, repitiendo indefinidamente la operación con cada uno de los segmentos más pequeños que vamos obteniendo.

$E_0 = [0,1]$

$E_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

$E_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$

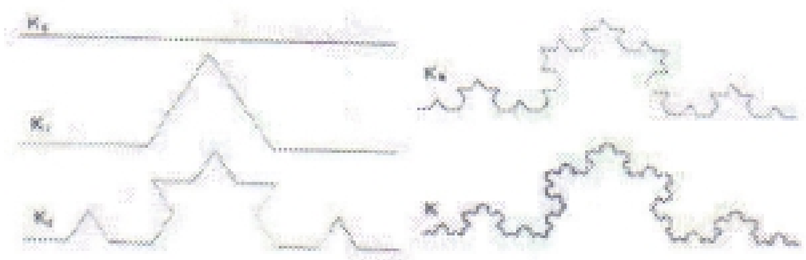
..................................................................

Estos conjuntos forman una sucesión decreciente $E_{k+1} \subset E_k$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, cuyo conjunto límite $E = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$ se llama CONJUNTO TERNARIO DE CANTOR.

**PROPIEDADES**
- $E \neq \emptyset$; contiene, entre otros puntos, a los extremos del intervalo.
- Es cerrado y acotado, luego es CERRADO DE $\mathbb{R}$ .
- En E no hay puntos aislados, todo punto de E es límite de las sucesiones formadas por los extremos de los intervalos de tamaño $3^{-k}$ que lo contienen.

## CURVA DE KOCH (1904)

Partiendo de un segmento rectilíneo del plano por ejemplo $K_0 = [0, 1] \times \{0\}$ en $\mathbb{R}^2$ se divide éste en tres partes iguales, sustituyendo la central por dos segmentos que, junto con el suprimido, formarán un triángulo equilátero situado por encima de $K_0$. Se obtiene así una poligonal $K_1$ de longitud $\frac{4}{3}$. Para cada uno de los 4 segmentos de dicha poligonal se repite el proceso y así sucesivamente.



**PROPIEDADES**
- La poligonal $K_i$ tiene longitud $\left(\frac{4}{3}\right)^i$ y está formada por segmentos de tamaño $\left(\frac{1}{3}\right)^i$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

- La Curva de Koch es continua y converge uniformemente.
- No es diferenciable en ningún punto.

Otro ejemplo interesante es la CURVA DE HILBERT.

En estos conjuntos existe una discordancia entre su tamaño real y su configuración espacial, es decir, su disposición en el espacio. Por ello se consideró necesario establecer una medida adecuada a su tamaño, por una parte y por otra estudiar su forma y propiedades geométricas. Así surge la TEORÍA GEOMÉTRICA DE LA MEDIDA. Gracias a la DIMENSIÓN DE HAUSDORFF se puede distinguir el tamaño de los conjuntos paradójicos.

## MEDIDA DE CONJUNTOS GEOMÉTRICOS

El tamaño de un conjunto finito viene dado por el número de elementos que lo componen, BIYECCIÓN con $\{1,..., n\}$. Un conjunto infinito es aquel que puede ponerse en correspondencia uno a uno con una de sus partes, quitando las partes impropias. Dos conjuntos infinitos tienen el mismo cardinal si existe una aplicación biyectiva entre sus elementos.

Cuando un conjunto infinito tiene el mismo cardinal que los números naturales $\mathbb{N}$ se dice que es numerable. $\mathbb{R}$ no es numerable y $\mathbb{Q}$ si lo es.

**DEFINICIÓN** : $\sigma-$álgebra

X conjunto, una $\sigma-$álgebra de X es una familia A de subconjuntos de X verificando:

a) $X \subset A$

b) La unión de una cantidad finita o numerable de elementos de A también pertenece a A.

c) La diferencia conjuntista de elementos de A pertenece a A

El complementario de un elemento de A o la intersección finita o numerable también pertenecen a A (Leyes de De Morgan).

**DEFINICIÓN** : Medida

X conjunto, A $\sigma-$álgebra de X, $m : A \rightarrow [0,\infty)$ aplicación, es una medida si:

a) $m(\varnothing) = 0$

b) Es completamente aditiva, es decir, para cualquier familia finita o numerable $\{E_k\} \subset A$ disjuntos dos a dos, $m(\bigcup_k E_k) = \sum_k m(E_k)$

Los elementos de A son CONJUNTOS MEDIBLES

* $A \subset B$ ambos medibles entonces $m(A) \leq m(B)$ y $m(B) = m(A) + m(B-A)$

* Si $m : A \rightarrow [0,\infty)$ verifica la propiedad anterior, $m(\varnothing) = 0$ y sólo se cumple que $m(\bigcup_k E_k) \leq \sum_k m(E_k)$, m se llama MEDIDA EXTERIOR

**EJEMPLOS**

a) $X = \mathbb{N}$ ,A =Todos sus subconjuntos

La aplicación descrita que a cada subconjunto acotado le hace corresponder su número de elementos e infinito a los no acotados es una medida y se llama **MEDIDA 0-DIMENSIONAL**

b) $X = \mathbb{R}$, A $\sigma-$álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$

Para medir un conjunto de A se recubre por una cantidad numerable de intervalos y se evalúa la suma de sus longitudes. El ínfimo de tales sumas entre todos los posibles recubrimientos se llama **MEDIDA DE LEBESGUE 1-DIMENSIONAL** del conjunto.

A diferencia de la medida 0-dimensional, la medida de Lebesgue no observa la cantidad de elementos del conjunto sino su ubicación en $\mathbb{R}$ . En $\mathbb{R}^n$ se determinan el volumen n-dimensional de una CAJA (producto cartesiano de n-intervalos) como el producto de las longitudes e los intervalos que la definen. De forma similar al caso unidimensional, en $\mathbb{R}^n$ existe una $\sigma-$álgebra de Lebesgue n-dimensional a cuyos elementos se asigna medida de Lebesgue n-dimensional tomando el ínfimo de las sumas de los volúmenes para los recubrimientos con cantidades numerables de cajas.
NOTA:$\sigma-$álgebra BOREL: La generada por los abiertos de $\mathbb{R}^n$
$\sigma-$álgebra LEBESGUE es un "poco" más que la de Borel

**MEDIDA DEL CONJUNTO DE CANTOR**

$E_0 = [0,1]$

$E_{00} = [0, \frac{1}{3}]$, $E_{01} = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $E_{02} = [\frac{2}{3}, 1]$

$E_1 = E_{00} \cup E_{022}$

$E_2 = E_{000} \cup E_{002} \cup E_{020} \cup E_{022}$

..............................................................

En general $E_n$ será la unión de $2^n$ intervalos de longitud $3^{-n}$ numerados con subíndice $0a_1a_2 \ldots a_n$ con $a_i \in \{0,1,2\}$, $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

**RESULTADOS**

* E no es numerable
* $E \rightarrow [0,1]$ biyección. Entonces tienen el mismo cardinal
* E es de medida 1-dimensional cero

Demostración: E medible, por ser intersección numerable de los $E_k$ y cada uno de éstos unión finita de intervalos.

$m(E_k) = \frac{2}{3}^k$ . Entonces como $E \subset E_k$ y $0 \leq m(E_k) \leq \frac{2}{3}^k$ , si $k \rightarrow \infty$ entonces $m(E) = 0$

Es un conjunto no numerable de medida 1-dimensional cero, demasiado grande para medir en dimensión cero y demasiado pequeño para tener medida positiva en dimensión uno.

**MEDIDA DE LA CURVA DE KOCH**

Los vértices de $K_i$ permanecen fijos en las parametrizaciones posteriores, $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

**RESULTADO**

La Curva de Koch es de medida de Lebesgue 2-dimensional cero. La Curva de Koch es un conjunto demasiado pequeño para tener medida 2-dimensional positiva, pero demasiado grande para asignarle medida 1-dimensional finita.

Ejemplos como los que hemos visto llevaron a CARATHEODORY y HAUSDORFF y otros a plantear en los años 20 las limitaciones del concepto tradicional de dimensión, así como la necesidad de considerar dimensiones no enteras o FRACTALES

# CONJUNTOS AUTOSEMEJANTES. DIMENSIÓN DE SEMEJANZA

**DEFINICIÓN** Copias semejantes de razón r
Por copia semejante de razón r de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ entendemos el conjunto imagen obtenido al aplicar una homotecia de razón r compuesta con un movimiento isométrico (traslación y/o giro).

**DEFINICIÓN** Conjuntos autosemejantes
Un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$ diremos que es autosemejante de N copias y razón r si podemos expresarlo como unión disjunta de N copias semejantes de razón r.

**EJEMPLO**:

- [0,1) es autosemejante de 2 copias de razón $\frac{1}{2}$
- Un intervalo semiabierto cualquiera

**NOTA**
Los parámetros número de copias y razón no son únicos. Un intervalo puede expresarse en general como unión de k copias de razón $\frac{1}{k}$, $\forall$ k $\in \mathbb{N}$.

**EJEMPLO**:

- El rectángulo semiabierto [0,1) x [0,1) es autosemejante de 4 copias y razón $\frac{1}{2}$.
- En general, cualquier rectángulo semiabierto de $\mathbb{R}^2$ es autosemejante de $k^2$ copias y razón r = $\frac{1}{k}$, con k $\in \mathbb{N}$. Análogamente las cajas semiabiertas de $\mathbb{R}^n$ son autosemejantes de N copias y razón r con N = $r^{-n}$ y r el inverso de cualquier número natural.

**EJEMPLO**

* E es autosemejante de 2 copias y razón $\frac{1}{3}$, E = (E ∩ [0, $\frac{1}{3}$]) ∪ (E ∩ [$\frac{2}{3}$,1])

* La Curva de Koch es autosemejante de 4 copias y razón $\frac{1}{3}$

**RESULTADOS**
a) A $\subset \mathbb{R}^n$ medible y B copia semejante de razón r entonces m (B) = $r^n$.m (A)
b) A $\subset \mathbb{R}^n$ autosemejante de N copias y razón r, y con medida n-dimensional positiva, entonces N = $r^{-n}$ luego $n = -\frac{\log N}{\log r}$

**DEFINICIÓN** Dimensión de semejanza
Se llama Dimensión de Semejanza de un conjunto de N copias y razón r al número $n = -\frac{\log N}{\log r}$

**EJEMPLOS**

- Caja de $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión de semejanza n. Igual ocurre para cualquier conjunto de medida positiva

- E, $n = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6039...$

- Curva de Koch, $n = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.262...$

## MEDIDA Y DIMENSIÓN DE HAUSDORFF

**DEFINICIÓN** Medida s-dimensional

Sean s ≠ 0 ,E esfera n-dimensional de $\mathbb{R}^n$ , s ≤ n, diam (E) = d (E). Llamados TAMAÑO s-dimensional de E a $d(E)^s$

Dado A ⊂ $\mathbb{R}^n$, llamamos $\delta$-recubrimiento de A a toda sucesión ⟨$E_i$⟩ de esferas de diámetro menor o igual que $\delta$ que recubran A: $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ y diam ($E_i$) ≤ $\delta$.

Llamamos TAMAÑO s-dimensional de un recubrimiento de A a la suma de los tamaños s-dimensionales de las esferas que lo forman: $\sum_{k=1}^{\infty} d(E_k)^s$ y diam ($E_k$) ≤ $\delta$.

Llamamos TAMAÑO s-dimensional a escala $\delta$ de A ($H_\delta^s(A)$) al ínfimo de los tamaños s-dimensionales de los $\delta$-recubrimientos de A:

$H_\delta^s(A)$ = ínf ⟨ $\sum_{i=1}^{\infty} d(E_i)^s$ tal que ⟨$E_i$⟩ es $\delta$-recubrimiento de A ⟩

$\lim_{\delta \to 0} H_\delta^s(A) = H^s(A)$**: MEDIDA DE HAUSDORFF DE A**

**PROPIEDADES**

a) La medida s-dimensional es MEDIDA EXTERIOR

b) Es medida si la restringimos a la $\sigma$-álgebra de Borel

c) La medida de Hausdorff n-dimensional en $\mathbb{R}^n$ es igual a la de Lebesgue multiplicada por un valor constante

**TEOREMA**

A ⊂ $\mathbb{R}^n$. Entonces $\exists_1$ s ϵ $\mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} t < s \Rightarrow H^t(A) = \infty \\ t > s \Rightarrow H^t(A) = 0 \end{cases}$

**DEFINICIÓN** Dimensión de Hausdorff

A ⊂ $\mathbb{R}^n$. Se llama dimensión de Hausdorff de A a s = ínf ⟨ t, tal que $H^t(A) = 0$ ⟩

**NOTA**

Este concepto amplía la dimensión de semejanza antes definida. El matemático australiano J. HUTCHINSON desarrolló en 1981 una teoría de autosemejanza con una definición menos restrictiva que la vista aquí, pues admite que las copias semejantes sean de razones distintas y además se solapen en subconjuntos de medida cero en la dimensión del conjunto total. En los fundamentos de su teoría, Hutchinson generaliza el concepto de dimensión de semejanza anteriormente expuesto y demuestra su coincidencia con la dimensión de Hausdorff.

## GEOMETRÍA FRACTAL EN LA NATURALEZA

MANDELBROT ”The fractal geometry of the Nature”

La frontera entre dos medios no debe describirse en términos de variedades diferentes, pues si la analizamos en profundidad notaremos incursiones de un medio en el otro que se observa a cualquier escala.

**COSTAS**, **FRONTERAS ENTRE PAÍSES**, la formación es un proceso que se puede modelizar por una Curva de Koch. Es posible ajustar el modelo de formación de la curva para conseguir que se adapte mejor al de formación de una costa. Pero por fuerza, debe llamar la atención que la dimensión de Hausdorff de la Curva de Koch sea igual a 1,26 y la dimensión fractal de la costa de Gran Bretaña, obtenida empíricamente, sea 1,3. Es posible ajustar el proceso de formación de la curva para conseguir que se adapte mejor al de formación de la costa.

Basta con introducir una variable aleatoria: partimos de un segmento de longitud uno, sustituimos el tercio central del segmento por triángulos isósceles con base en el segmento y con el tercer vértice dirigido ”hacia abajo” CABO o ”hacia arriba” GOLFO. Podemos hacer que la profundidad de estos accidentes sea una variable aleatoria uniformemente distribuida, considerando los calores positivos como cabos y los negativos como golfos. Reiterando el proceso conseguimos un modelo de costa del que se pueden obtener los algoritmos de formación.

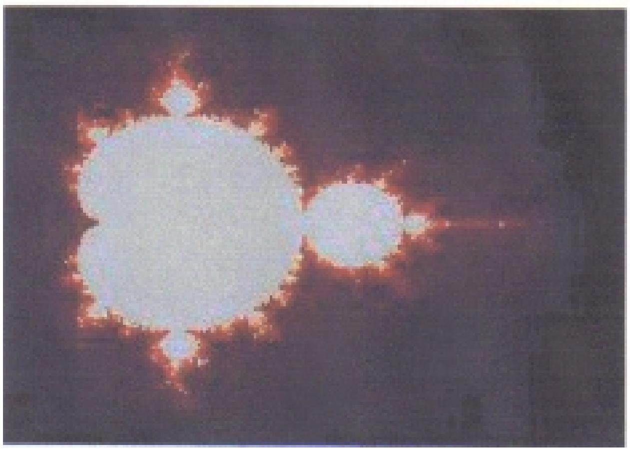
**RAMIFICACIÓN**: Se debe considerar una figura polilínea y en cada una de los segmentos que la forman se traza una polilínea semejante a la inicial.

**FRONTERA EL CONJUNTO DE MANDRELBROT** (Fractal más popular y conocido)

Inspirado en los trabajos de GASTON JULIA (Discípulo de Dirichlet) y PIERRE FATOU en los años 20, decidió estudiar el conjunto de los puntos $c \in \mathbb{C}$ para los que la sucesión definida por recurrencia

$$x_0 = 0$$
$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$

permanece acotada.



Se observa que alguna de estas copias parecen diminutas islas separadas del cuerpo principal. Sin embargo, HUBBARD ha demostrado que el conjunto de Mandelbrot es CONEXO pero algunas partes se conectan a través de filamentos tan finos que escapan

a la definición con que trabajan los programas informáticos, que generan las ilustraciones.
Incluso estos mismos filamentos presentan estructuras ESPIRALES, EN ZIG ZAG con forma de abanico,... con una cierta autosimilitud a todas las escalas y enorme complejidad.

**COPOS DE NIEV**E, **RED CAPILAR** para la circulación sanguínea

**TEORÍA DEL CAOS** turbulencias

**POLÉMICA** ¿Existen fractales en la realidad? o sólo en los ordenadores y en las teorías (bastante flojas en lo que a demostraciones se refiere)

**COMPRESIÓN DE IMÁGENES**
Es una de las ideas más controversiales. El concepto básico detrás de la compresión fractal de imágenes es tomar una imagen y expresarla como un SISTEMA DE FUNCIONES ITERADAS (SFI). Un SFI es el conjunto de funciones que describen partes de un fractal que, una vez juntas, recrean dicho fractal en su totalidad. Si un fractal puede ser descrito por un número pequeño de funciones, el SFI es una descripción bastante compacta del fractal. La imagen puede ser rápidamente desplegada y a cualquier grado y magnificación con infinitos niveles de detalle fractal. El mayor problema detrás de esta idea es encontrar el SFI que describa la imagen.

**EFECTOS VISUALES**
Una de las aplicaciones de los fractales son sus efectos visuales. No sólo engañan la vista, sino que también de algún modo confunden a la mente. Los fractales han estado siendo usados comercialmente en la industria cinematográfica en películas como STAR WARS y STARTREK. Las imágenes fractales son usadas como una alternativa ante los costosos sets elaborados para producir paisajes fabulosos.

**STAR WARS EL RETORNO DEL JEDI**
Superficie de la Estrella de la Muerte
Superficie de la Luna de Endor

**STARTREK II LA IRA DE KHAN**
Superficie del planeta Génesis

**BIBLIOGRAFÍA**
BOYER,C. Historia de las matemáticas Alianza Editorial Madrid 1994
FEDER, J. Fractals Plenum New York 1988
GUZMÁN y otros Estructuras fractales y sus aplicaciones Labor 1993
MANDELBROT, B. The fractal geometry of nature Freeman and Co. 1977
STEWART, I. ¿Juega Dios a los dados? Editorial Crítica Barcelona 1991
STEWART, I. De aquí al infinito Editorial Crítica Barcelona 1998

JUAN GUIRADO GRANADOS 2000
juanguirao@latinmail.com