SOBRE EL CONCEPTO DE CURVA ALGEBRAICA

Entre las curvas del espacio afin n-dimensional $E^n(R)$ definidas implícitamente, esto es, dadas por las soluciones de una ecuación de la forma F = 0, consideramos las curvas algebraicas, es decir, aquellas en las que F es un polinomio con coeficientes en R (o, dicho de una forma más general, sobre un cuerpo K algebraicamente cerrado).

1. Preliminares:

Consideremos un cuerpo algebraicamente cerrado, como R (números reales) por ejemplo, y construyamos el espacio afín M^n = RxRx..-n-.xR, que llamaremos espacio afín n-dimensional sobre R. Así, M^1 = R es la *recta afín*, el espacio M^2 = RxR es el *plano afín,* y M^3 = RxRxR es el *espacio afín tridimensional.*

El conjunto de todos los polinomios en n indeterminadas sobre el cuerpo R, o sea,

$$A = R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

es un anillo, y una familia cualquiera F de polinomios de A engendra, naturalmente, un ideal I(F) de dicho anillo.

También, el conjunto V(F) de los ceros de una familia F de polinomios de A, que llamaremos *conjunto algebraico,* o bien, *conjunto algebraico afín* engendra un ideal I(V(F)) del anillo A de todos los polinomios en n indeterminadas.

2. Superficies y curvas algebraicas:

Si f $\in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ no es constante, entonces, el conjunto de los ceros de f, V(f) $\in R^n$ se llama *hipersuperficie algebraica n-diomensional.* Si el grado de dicho polinomio f fuera uno, grado(f) = 1, entonces se diría que f *es un hiperplano n-dimensional.*

$$grado(f) = 1 \rightarrow v(f) \in R^n \ \ es\ un\ hiperplano\ n - \dim ensional$$

Si grado(f) = 1 y, además, n = 3, entonces f $\in R[x_1, x_2, x_3]$ es un *plano del espacio ordinario.*

Si $f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}$ son polinomios del anillo $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, \`primos entre sí, entonces el conjunto algebraico $V(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})$ se llama *curva algebraica* de R^n, o bien, *curva algebraica n-dimensional.*

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n-1} \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]\ primos \rightarrow v(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1}) \in R^n \ \ es\ una\ curva\ a\lg.\ n - \dim ens$$

Si n = 2, entonces, para un f $\in R[x_1, x_2]$ el conjunto algebraico V(f) se llama *curva plana algebraica.* Y si el grado de f fuera 1, grado(f) = 1, entonces la curva sería una línea recta del plano, es decir, serían los ceros de un polinomio del tipo $ax_1 + bx_2 + c = 0$.

3. Puntos simples y puntos singulares:

Dada una curva algebraica por el conjunto algebraico V(f), conjunto de los ceros del polinomio f en n indeterminadas, se dice que el punto p(a, b, ..., w) es un punto simple si es no nula alguna de las n derivadas parciales con respecto a cada indeterminada:

$$f_{x_i}(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_p \neq 0$$

Si se trata de una curva algebraica plana, un punto p(a,b) será simple si es no nula alguna de las dos derivadas posibles:

$$f_{x_1}(p) \neq 0 \; o \; bien \; f_{x_2}(p) \neq 0$$

Un punto que no es simple se llama *punto singular de la curva algebraica.*

Una curva que solamente está constituida por puntos simples se llama *curva algebraica no singular.*

4. Recta tangente y recta normal a una curva algebraica plana en un punto simple:

Si consideramos la curva algebraica plana dada por el conjunto algebraica v(f), con $f \in R[x_1, x_2]$, se llama recta tangente a la misma en el punto simple p(a,b) a la recta del plano dada por los ceros del polinomio

$$f_{x_1}(p)(x_1 - a) + f_{x_2}(p).(x_2 - b)$$

que podemos representar por

$$f_{x_1}(p)(x_1 - a) + f_{x_2}(p).(x_2 - b) = 0$$

Análogamente, se define también la recta normal a una curva algebraica plana en un punto p(a, b) simple, por la expresión

$$f_{x_1}(p)(x_1 - a) - f^{-1}{}_{x_2}(p).(x_2 - b) = 0$$

5. Documentación:

FULTON, WILLIAN. Curvas Algebráicas. Editorial Reverté
ABELLANAS C., PEDRO, Geometría Básica. Ediciones Romo