

1. Introducción. Definición de las funciones vectoriales continuas:

Si llamamos M_2 al plano métrico asociado al espacio vectorial euclidiano de dos dimensiones, (E_2, R) , y consideramos el sistema de referencia ortonormal en M_2 , $\{0, \{u_1, u_2\}\}$, se puede establecer la biyección o correspondencia biunívoca

$$f: (E_2, R) \longrightarrow M_2$$

por la que a cada vector del espacio vectorial le corresponde un punto del espacio métrico, definido de la siguiente manera

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 \hat{I} (E_2, R), f(x) = (x_1, x_2) \hat{I} M_2$$

Y también, desde un intervalo cualquiera $[a, b]$ de números reales, se puede establecer la aplicación

$$v(u): [a, b] \longrightarrow (E_2, R),$$

por la que a cada número real r de $[a, b]$ le corresponde un vector del espacio (E_2, R) :

$$r \hat{I} [a, b], v(u)(r) = x_1u_1 + x_2u_2 = v_1(u) + v_2(u) \hat{I} (E_2, R)$$

Esto quiere decir que para un par cualquiera $([a, b], v(u))$, donde $[a, b]$ es un intervalo cerrado de R y $v(u): [a, b] \longrightarrow (E_2, R)$, una función vectorial continua por la que a cada número real de $[a, b]$ le corresponde un vector del espacio vectorial (E_2, R) , queda definida la aplicación compuesta

$$f \circ v(u): [a, b] \longrightarrow (E_2, R) \longrightarrow M_2$$

que denotaremos, simplemente, por $v(u)$.

Así, pues, podemos considerar el conjunto de todos los pares de la forma $([a, b], v(u))$ donde $[a, b]$ es un intervalo cualquiera del cuerpo R de los números reales, y $v(u): [a, b] \longrightarrow M_2$ es una función vectorial continua, por la que a cada número real del intervalo le corresponde un punto del plano métrico M_2 , o bien, indistintamente, el vector de posición de dicho punto.

2. Arco de curva plana definida paramétricamente:

Sea H el conjunto de todos los pares $([a, b], v(u))$. Definimos en H una relación de equivalencia por la condición de que dos pares, $([a, b], v(u))$ y $([c, d], w(u))$, son:

a) **Equivalentes propiamente** sii existe una función continua estrictamente creciente $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$ tal que $h(a) = c$, $h(b) = d$ y $h(w(u)) = v(u)$.

b) **Equivalentes impropriamente** sii existe una función continua estrictamente decreciente $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$ tal que $h(a) = d$, $h(b) = c$ y $h(w(u)) = v(u)$.

Es inmediato que esta relación es de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva), por lo que parte al conjunto H en clases de equivalencia, estando formada cada clase por el conjunto de los pares entre sí equivalentes.

Cada una de las clases de equivalencia en la relación anterior se llama **arco de curva plana definida paramétricamente**. Cada elemento $([a, b], v(u))$ de una clase es una **representación paramétrica** del arco de curva plana definida paramétricamente.

Se dice que el arco de curva plana definida paramétricamente $([a, b], v(u))$ es **cerrado**, sii $v(a)=v(b)$.

Se dice que el arco de curva plana definida paramétricamente $([a, b], v(u))$ es un **arco simple de Jordan** sii la función $v(u)$ es uno a uno. Esto es, inyectiva.

Un **arco simple cerrado** o **curva de Jordan** es un arco $([a, b], v(u))$ en donde la función $v(u)$ es uno a uno y además $v(a) = v(b)$.

3. Arco de curva plana dirigido:

Dos representaciones paramétricas del mismo arco de curva plana son , por tanto, dos pares equivalentes, ya sea equivalentes propiamente, o equivalentes impropriamente.

Dos representaciones paramétricas del mismo arco de curva plana se dice que **tienen la misma orientación** sii la biyección continua $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$ es creciente, esto es, si son equivalentes propiamente. Si dicha biyección es decreciente se dice que **tienen orientación opuesta**, que es el caso de que sean equivalentes impropriamente. Esta relación parte, por tanto, al conjunto de las representaciones paramétricas de un arco de curva plana en dos clases, que corresponden a los dos sentidos de recorrido del arco: la misma orientación y la orientación opuesta.

4. Representaciones admisibles:

Si las funciones componentes de $v(u)$, $v_1(u)$ y $v_2(u)$, son ambas diferenciables r veces y continuas, se dice que $([a, b], v(u))$ es de **clase r** , y se acostumbra a indicar esto escribiendo que $v(u) \in C^r$.

Se dice que la representación paramétrica $([a, b], v(u))$ es **admisibile de clase r** si se verifica que es de clase r con derivada primera no nula:

$$1) v(u) \in C^r$$

$$2) dv(u)/du \neq 0$$

Digamos, finalmente, que una representación paramétrica admisible se define como **representación paramétrica regular** sii $r \geq 1$. Es decir, si es, al menos, una vez diferenciable, con primera derivada no nula.

5. Cambios de parámetros admisibles:

Definimos asimismo como **cambio de parámetro admisible de clase r** a una aplicación suprayectiva $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$ tal que

$$2) h \in C^r$$

$$2) dh/du \neq 0, \forall u \in [a, b]$$

Teorema :

Si $h(u): [a, b] \rightarrow [c, d]$ es un cambio admisible de parámetros de clase r , entonces:

- $h(u)$ es una aplicación estrictamente monótona, y, por tanto, uno a uno.
- La función inversa, $u(h): [c, d] \rightarrow [a, b]$, es, también, un cambio de parámetro admisible de clase r .

En efecto:

- Puesto que la derivada $h'(u)$ es continua y positiva $h'(u) > 0$, será la función siempre creciente o bien siempre decreciente. Por tanto, estrictamente monótona.
- Al ser, en definitiva, $h(u)$ una biyección, existirá la biyección inversa, $u(h)$, que verifica que $du/dh = 1/h'(u)$, pues $h'(u) \neq 0, \forall u \in [a, b]$. Trivialmente se comprueba la existencia de derivadas segunda, tercera, etc.. con $h'(u)$ en el denominador, por lo que existen hasta el orden r .

Sea el conjunto K de todas las representaciones paramétricas de clase r . Dos elementos de K , $([a, b], v(u))$ y $([c, d], w(u))$, se dicen equivalentes, propia o impropriamente, si existe un cambio de parámetro admisible de clase r , $h: [a, b] \rightarrow [c, d]$ tal que $w(h(u)) = v(u), \forall u \in [a, b]$. Esta relación es, trivialmente, de equivalencia, y parte al conjunto K en clases de equivalencia, que se llaman **arcos de curva paramétrica de clase r** . Si $r \geq 1$, se llaman **arcos de curva regular**. Consideraremos en lo que sigue solo arcos de curva regulares.

6. Tangente y normal a una curva plana:

Sea la representación paramétrica $v(u): [a, b] \rightarrow [c, d]$, y sean A y B dos puntos de la curva de vectores de posición respectivos $v(u_0)$ y $v(u_0 + \Delta u)$. Cualquier punto genérico X de la cuerda que une a los puntos A y B viene dado por un vector de posición $v(x)$ tal que es $v(x) = v(u_0) + n \cdot AB$, o sea:

$$v(x) = v(u_0) + n \cdot (v(u_0 + \Delta u) - v(u_0))$$

El límite, de existir, al que tiende dicha cuerda cuando el punto B tiende a coincidir con el punto A (o sea, cuando $\Delta u \rightarrow 0$) es lo que recibe el nombre de **recta tangente a la curva en el punto A** .

Si existe la tangente a la curva en un punto A , se define la **recta normal a la curva en el punto A** como la recta perpendicular a la tangente en dicho punto.

Teorema :

- Si existe el siguiente límite en el punto A de vector de posición $v(u_0)$, entonces existe la tangente a la curva en A .

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{v(u_o + \Delta u) - v(u_o)}{\Delta u^r} = q(u_o), \quad \forall u_o \in [a, b]$$

y el vector $q(u_o)$ es el vector director de la recta tangente.

2) Si $v(u): [a, b] \rightarrow [c, d]$ es un arco de curva regular, entonces tiene tangente en todos sus puntos, y es de la forma:

$$v(u) = v(u_o) + \mathbf{a}q(u_o)$$

En efecto:

1) Si consideramos que la expresión $v(x) = v(u_o) + n.(v(u_o + \Delta u) - v(u_o))$ se puede escribir como

$$v(u) = v(u_o) + n.\Delta u^r \cdot \frac{v(u_o + \Delta u) - v(u_o)}{\Delta u^r}$$

se tiene, tendiendo al límite, para $\Delta u \rightarrow 0$:

$$v(u) = v(u_o) + \lim_{\Delta u \rightarrow 0} n.\Delta u^r \cdot \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{v(u_o + \Delta u) - v(u_o)}{\Delta u^r} = v(u_o) + \mathbf{a}q(u_o)$$

donde se ha llamado $\mathbf{a} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} n.\Delta u^r$, que es no nulo, pues de lo contrario, no

sería una recta.

3) Es inmediato de la definición de arco de curva regular y de 1).

La recta normal en el punto de vector de posición $v(u_o)$ sería, por analogía:

$$v(u) = v(u_o) + \mathbf{a}q'(u_o)$$

donde es $q'(u_o)$ un vector perpendicular al vector $q(u_o)$.

Para determinarlo, tengamos en cuenta que si los vectores $q'(u_o)$ y $q(u_o)$ son perpendiculares, será: $q'(u_o) \cdot q(u_o) = 0$, por lo que se tendrá que $q'_1(u_o) \cdot q_1(u_o) + q'_2(u_o) \cdot q_2(u_o) = 0$, y la solución más sencilla es que $q'_1(u_o) = -q_2(u_o)$, $q'_2(u_o) = q_1(u_o)$

Esto nos permite escribir las ecuaciones de la tangente y la normal:

Para la tangente:

$$(v_1(u), v_2(u)) = (v_1(u_o), v_2(u_o)) + \mathbf{a}(q_1(u_o), q_2(u_o)) \rightarrow \begin{cases} v_1(u) = v_1(u_o) + \mathbf{a}q_1(u_o) \\ v_2(u) = v_2(u_o) + \mathbf{a}q_2(u_o) \end{cases}$$

eliminando ahora el parámetro α :

$$\frac{v_1(u) - v_1(u_o)}{q_1(u_o)} = \frac{v_2(u) - v_2(u_o)}{q_2(u_o)}, \text{ o bien } v_2(u) = v_2(u_o) + \frac{q_2(u_o)}{q_1(u_o)}(v_1(u) - v_1(u_o))$$

Para la normal actuamos del mismo modo:

$$(v_1(u), v_2(u)) = (v_1(u_0), v_2(u_0)) + \alpha(q'_1(u_0), q'_2(u_0)) \rightarrow \begin{cases} v_1(u) = v_1(u_0) + \alpha q'_1(u_0) \\ v_2(u) = v_2(u_0) + \alpha q'_2(u_0) \end{cases}$$

eliminando ahora el parámetro α :

$$\frac{v_1(u) - v_1(u_0)}{-q_2(u_0)} = \frac{v_2(u) - v_2(u_0)}{q_1(u_0)}, \text{ o bien } v_2(u) = v_2(u_0) - \frac{q_1(u_0)}{q_2(u_0)}(v_1(u) - v_1(u_0))$$

en definitiva, llamando $m = \frac{q_2(u_0)}{q_1(u_0)}$, a la pendiente de la tangente, se pueden expresar las ecuaciones escalares de ambas rectas así:

$$\text{Tangente: } v_2(u) = v_2(u_0) + m(v_1(u) - v_1(u_0))$$

$$\text{Normal: } v_2(u) = v_2(u_0) - \frac{1}{m}(v_1(u) - v_1(u_0))$$

O bien, usando la notación clásica corriente:
$$\begin{cases} y = y_0 + m(x - x_0) \\ y = y_0 - \frac{1}{m}(x - x_0) \end{cases}$$

7. El parámetro longitud de arco:

Sabemos que toda curva regular es rectificable, es decir, admite el cálculo de la longitud de su arco sobre un intervalo real dado. Siendo, por tanto, la representación paramétrica regular $([a, b], v(u))$ rectificable, se puede obtener la longitud de su arco sobre el intervalo de definición $[a, b]$, por

$$\Gamma_v(a, b) = \int_a^b \left| \frac{dv}{du} \right| du$$

Teorema:

Sea $([a, b], v(u))$ un arco regular y $u_0 \in [a, b]$. Si es $s(u) = \int_{u_0}^u \left| \frac{dv}{du} \right| du$, $\forall u \in [a, b]$, se

cumple que $s(u): [a, b] \rightarrow [s(a), s(b)]$ es un cambio de parámetro admisible de clase r .

En efecto:

a) $s(u)$ es suprayectiva y estrictamente creciente, por tratarse de la integral de una función positiva.

b) La derivada de s con respecto a u es no nula: $\frac{ds}{du} = \left| \frac{dv}{du} \right| \neq 0$

Al parámetro $s(u)$ le llamaremos **parámetro longitud de arco**.

8. Representación paramétrica natural. Las fórmulas de Frenet para una curva plana:

Si se toma como parámetro la longitud del arco s , entonces la representación paramétrica $([a, b], v(s))$ se llama **representación paramétrica natural**.

Consideremos los vectores $t(s) = dv(s)/ds$ y $k(s) = d^2v(s)/ds^2 = dt(s)/ds$, y veamos algunas de sus propiedades:

Teorema:

El vector $t(s)$ es unitario y tangente a la curva.

En efecto:

Siendo $\frac{ds}{du} = \left| \frac{dv}{du} \right| \neq 0$, y siendo el vector director de la recta tangente el

$$q(u_o) = \frac{dv(u_o)}{du}, \text{ se tendrá: } t = \frac{dv}{ds} = \frac{dv/du}{ds/du} = \frac{dv/du}{\left| dv/du \right|} = \frac{q(u_o)}{\left| q(u_o) \right|}, \text{ por tanto } t \text{ es}$$

unitario en la dirección de $q(u_o)$, es decir, en la dirección de la tangente.

Teorema:

Si llamamos $n(s)$ al vector unitario tal que $k(s) = |k(s)| \cdot n(s)$, se cumple que:

- 1) El vector $n(s)$ es unitario y perpendicular a $t(s)$.
- 2) El vector $dn(s)/ds$ es paralelo al vector $t(s)$.

En efecto:

- 1) Por definición, $n(s) = \frac{k(s)}{|k(s)|}$, por tanto, $n(s)$ es unitario en la dirección de $k(s)$. Veamos ahora la dirección de $k(s)$:

$$t(s) \cdot t(s) = 1 \rightarrow t(s) \cdot \frac{dt(s)}{ds} + \frac{dt(s)}{ds} \cdot t(s) = 0 \rightarrow 2 \cdot t(s) \cdot \frac{dt(s)}{ds} = 0 \rightarrow t(s) \cdot \frac{dt(s)}{ds} = 0 \rightarrow t(s) \cdot k(s) = 0$$

por tanto $t(s)$ y $k(s)$ son perpendiculares, esto es, $t(s)$ y $n(s)$ son perpendiculares.

- 2) Puesto que $n(s)$ es perpendicular a $t(s)$, bastará probar entonces que $dn(s)/ds$ es perpendicular a $n(s)$:

$$n(s) \cdot n(s) = 1 \rightarrow 2 \cdot n(s) \cdot \frac{dn(s)}{ds} = 0 \rightarrow n(s) \cdot \frac{dn(s)}{ds} = 0, \text{ por tanto es } dn(s)/ds$$

perpendicular a $n(s)$, y como $n(s)$ es perpendicular a $t(s)$, se concluye que $dn(s)/ds$ es paralelo al vector $t(s)$.

Los vectores unitarios $t(s)$ y $n(s)$ se llaman, respectivamente, **vectores tangente y normal a la curva en un punto**, y usualmente se representan por t y n , respectivamente. El vector $k(s)$ se llama **vector de curvatura de la curva en un punto**. El módulo del vector de curvatura, $|k(s)|$, se llama **curvatura de la curva en un punto**.

Teorema (Fórmulas de Frenet):

Se verifican las relaciones

$$\begin{aligned}\frac{dt(s)}{ds} &= |k(s)|n(s) \\ \frac{dn(s)}{ds} &= -|k(s)|t(s)\end{aligned}$$

En efecto:

a) Por definición de vector de curvatura, es $k(s) = \frac{dt(s)}{ds}$, y por definición del vector

$$n(s): \frac{dt(s)}{ds} = k(s) = |k(s)|n(s) \rightarrow \frac{dt(s)}{ds} = |k(s)|n(s)$$

b) Se tiene:

$$\begin{aligned}n(s).t(s) = 0 &\rightarrow \frac{dn(s)}{ds}.t(s) + n(s).\frac{dt(s)}{ds} = 0 \rightarrow \frac{dn(s)}{ds}.t(s) + n(s).|k(s)|n(s) = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{dn(s)}{ds}.t(s) = -|k(s)| \rightarrow \frac{dn(s)}{ds} = -|k(s)|t(s)\end{aligned}$$

Estas expresiones se llaman **Fórmulas de Frenet para una curva plana**.

9. Radio de curvatura y círculo osculador.

Se define el **radio de curvatura** de una curva en un punto como el inverso de su curvatura $R = 1/K(s)$.

Dados tres puntos de la curva, A, B, C, se llama **círculo osculador de la curva en el punto A** al círculo que resulta cuando los puntos B y C tienden a confundirse con el punto A, esto es, cuando $B, C \rightarrow A$.

Se comprueba sin dificultad que el radio de curvatura de una curva en un punto es también el radio del círculo osculador.

Asimismo, el centro del círculo osculador se llama también **centro de curvatura de la curva**, y es $c(s) = v(s) + R.n$.