CONSTRUCCIÓN DE FRACTALES CLÁSICOS
PROPUESTA DIDÁCTICA

JORGE ELIÉCER VILLARREAL FERNÁNDEZ

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es una propuesta para introducir los conceptos y procedimientos básicos de la Geometría Fractal en el bachillerato. La Geometría Fractal es un área de investigación muy reciente en matemáticas cuyo desarrollo se ha visto acelerado gracias a sus inmensas aplicaciones en diferentes campos de la ciencia y la tecnología y al desarrollo de los computadores. Estudia figuras altamente irregulares generadas a través de procesos recursivos que tienen como característica fundamental autosimilaridad y dimensión no entera. Lo primero significa que poseen alguna propiedad invariante bajo el cambio de escala. Por ejemplo, a veces la rama de un árbol está compuesta por pequeñas ramas que tienen una forma muy parecida a la totalidad de la rama. Lo segundo significa que no posee las dimensiones usuales: uno, la de la línea; dos, la del plano y tres, la del espacio. Es decir, son figuras que pueden habitar en espacios intermedios. Por ejemplo, encontrarse en el plano y en el espacio. En el trabajo sólo trataremos con el plano.

Este trabajo ha sido motivado por el interés que despierta el estudio de esta rama de la matemática en investigadores, profesores, alumnos y personas no especializadas. Este material didáctico enriquece los cursos normales de matemáticas al aportar nuevos contextos de enseñanza. Además brinda a los estudiantes la oportunidad de reforzar sus conocimientos en matemáticas y reducir de esta manera la dificultad que ellos tienen con su aprendizaje. Al mismo tiempo los familiariza a muy temprana edad con temas científicos muy recientes, lo que aumenta la probabilidad de hacer avanzar la ciencia y la tecnología, pues entre estos jóvenes pueden existir algunos muy inquietos que se interesen seriamente por estos temas. Pero también es una ayuda para el profesor, ya que le da la posibilidad de ponerse al tanto de los avances de su propia disciplina y al mismo tiempo, encontrar elementos para enriquecer su actividad docente.

El trabajo aborda, por espacio, sólo la construcción de dos fractales clásicos: el conjunto de Cantor y el Triángulo de Sierpinski. La construcción de estos fractales se hace por medio de un método estático y otro dinámico. El primero no usa movimientos en el plano mientras que el segundo sí. Sin embrago ambos se fundamentan en un proceso recursivo y podrían ampliarse al resto de fractales clásicos.
Entonces el problema es la construcción de los fractales antes mencionados y para esto se plantean una serie de instrucciones que el estudiante al ir siguiendo va reconociendo cada una de las características del fractal y de su construcción. Esto quiere decir que se parte de los procesos de pensamiento, desde la observación y se va desarrollando hasta el planteamiento de hipótesis y la comparación de estas hipótesis con otras.

Las actividades planteadas nos brindan la posibilidad de trabajar con estudiantes diversos en el aula ya que como se va a construir conocimiento cada uno parte de sus potencialidades y tiene la posibilidad de obtener la información que le haga falta y profundizar hasta donde cada uno de ellos quiera ya que no hay limites para el desarrollo del pensamiento.

La propuesta esta diseñada para aplicar en los grados noveno, décimo y once. Sin embargo por la forma en que se realiza el desarrollo de las actividades y la construcción de conocimiento, se puede trabajar desde el grado sexto, teniendo en cuenta el nivel de conocimiento adquirido por estudiantes de este grado.

La problemática esta incluida en cada una de las dos secciones a trabajar, lo mismo que un corto recuento histórico que contextualice al alumno y le posibilite un mayor nivel de motivación.

OBJETIVO GENERAL

Construir en forma estática y dinámica e identificar patrones numéricos y geométricos en las estructuras clásicas de los fractales.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

a. Construir mediante una secuencia de instrucciones el conjunto de Cantor y elaborar otras formas alternativas de este conjunto con base en la misma idea de construcción.
b. Encontrar patrones aritméticos y algebraicos en el proceso de construcción del conjunto de Cantor y sus formas alternativas.
c. Construir el conjunto de Cantor mediante la aplicación de movimientos en el plano descritos verbalmente. Los movimientos que serán sujetos a dicha descripción son la homotecia y la traslación.
d. Construir el triángulo de Sierpinski mediante la realización de una secuencia de instrucciones.
e. Reconocer patrones numéricos y geométricos subyacentes en el triángulo de Sierpinski.
f. Construir el triángulo de Sierpinski mediante la descripción de movimientos geométricos en el plano.

CONJUNTO DE CANTOR

OBJETIVO:

A través del desarrollo de la presente guía, el estudiante estará en capacidad de

a. Construir mediante una secuencia de instrucciones el conjunto de Cantor y elaborar otras formas alternativas de este conjunto con base en la misma idea de construcción.
b. Encontrar patrones aritméticos y algebraicos en el proceso de construcción del conjunto de Cantor y sus formas alternativas.
c. Construir el conjunto de Cantor mediante la aplicación de movimientos en el plano descritos verbalmente. Los movimientos que serán sujetos a dicha descripción son la homotecia y la traslación.

INTRODUCCIÓN

Cantor (1845 – 1918) fue un matemático alemán cuyo trabajo se orientó hacia la fundamentación rigurosa de la matemática. Actualmente su obra es conocida como teoría de conjuntos. Como parte de dicho trabajo, publicó en 1883 el famoso conjunto que lleva su nombre: "Conjunto de Cantor". Este conjunto es considerado por los matemáticos como un conjunto de propiedades paradójicas. Por ejemplo, tiene infinitos puntos y sin embargo su medida es cero. Este conjunto fue obtenido por Cantor cuando intentaba caracterizar lo que es un conjunto continuo, es decir, denso[1] en todas partes. Cantor pensaba que todo conjunto perfecto debía ser continuo y encontró que ese conjunto es perfecto[2], pero no es denso en ninguna parte.

En esta guía construirás el conjunto de Cantor sólo en sus primeras etapas ya que, en la práctica, es imposible hacer procesos que contemplan infinitos pasos.

---

[1] Sean A y B conjuntos de números reales. Se dice que un conjunto A es denso en B si todo intervalo centrado en cualquier punto de B contiene puntos de A.

[2] Se dice que un conjunto es perfecto cuando es igual al conjunto de todos sus puntos de acumulación. Un punto de acumulación de un conjunto es aquel punto para el cual todo intervalo centrado en él contiene puntos del conjunto.

También realizarás algunas formas alternas de este conjunto; encontrarás patrones aritméticos y algebraicos presentes en el proceso de construcción; y utilizarás algunos movimientos básicos del plano en su elaboración.

Actividad 1

A. Construcción del conjunto de Cantor

1. Dibuja un segmento de 13.5 cm de largo.
2. El segmento anterior divídelo en tres partes iguales y borra la parte central.
3. A cada uno de los nuevos segmentos divídelo en tres partes iguales y borra la parte central.
4. Repite en cada uno de los nuevos segmentos obtenidos el punto 3.
5. Si se continúa con el mismo procedimiento indefinidamente,
    a. ¿Qué ocurre con la magnitud de los segmentos obtenidos?
    b. ¿Qué ocurre con la cantidad de segmentos?
    c. ¿Cuál sería la forma de la figura obtenida?

B. Formas alternas del conjunto de Cantor

Cuadrado de cantor

La construcción básica para elaborar el conjunto de Cantor a partir de un segmento es: "dividir el segmento en tres partes iguales y suprimir la parte central". Realiza las siguientes instrucciones:

1. Dibuja un cuadrado de 13.5 cm de lado en una hoja tamaño carta cuadriculada.
2. Sobre cada uno de los lados aplica la construcción básica para el conjunto de Cantor.
3. Con cada par de segmentos que forman las esquinas construye un cuadrado.
4. En cada uno de los cuadrados esquineros realiza nuevamente el punto 1 y 2.

5. Describe la figura que se obtendría de continuar indefinidamente con este procedimiento.

Triángulo de Cantor

Dibuja un triángulo equilátero (de 13.5 cm de lado) y sobre cada uno de los lados aplica la construcción básica de Cantor. En cada vértice, con el par de segmentos formados, completa un triángulo. Repite el proceso sobre cada uno de estos triángulos generados en las esquinas. Al terminar, vuelve a aplicar la construcción básica sobre cada uno de los nuevos triángulos. ¿Si se continúa con este procedimiento un número indefinido de veces, cómo crees que sería la figura resultante?

Actividad 2: Análisis de patrones numéricos y geométricos

Nota: Los conceptos matemáticos requeridos para el desarrollo de esta guía son: fracciones, decimales, área y perímetro de un cuadrado y un triángulo, así como la noción de serie geométrica.

A. Conjunto de Cantor

1. A continuación se ilustran cada una de las etapas del proceso de construcción del conjunto de Cantor. Responde las preguntas planteadas en cada etapa.

Etapa 0

1 unidad

a. ¿Cuántos segmentos hay? R: ________________

b. ¿Cuál es la longitud del segmento? R: _____________

Etapa 1

a. ¿Cuántos segmentos hay? R: __________
b. ¿Cuál es la longitud de cada segmento, si el segmento original mide una unidad? R: _______________

Etapa 2

a. ¿Cuántos segmentos hay? R: _______
b. ¿Cuál es la longitud de cada segmento, si el segmento original mide una unidad? R: _____________

Etapa 3

a. ¿Cuántos segmentos forman el conjunto de Cantor en su etapa 3? R: ___________
b. ¿Cuál es la longitud de cada segmento? R: ___________

Etapa 4

a. ¿Cuántos segmentos forman el conjunto de Cantor en su etapa 4? R: ___________
c. ¿Cuál es la longitud de cada segmento? R: ___________

2. Recopila la información en la siguiente tabla y complétala.

Etapa	**No de segmentos**	**Longitud del segmento**	
		Fracción	**Decimal**
1			
2			
3			
4			
5			
6			
.			

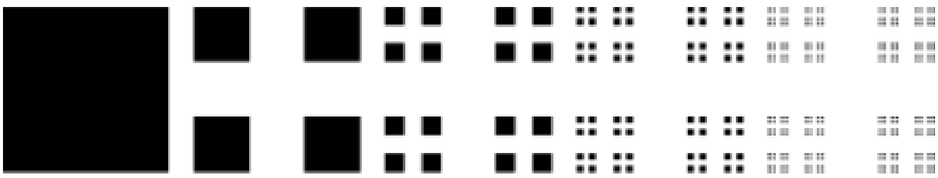
n			

3. En este punto encontrarás algunas sumas. Para el caso en el que la suma contenga un número muy grande de sumandos, es recomendable que trates de convertirla en una suma geométrica.

   a. ¿Cuánto suman las longitudes de los segmentos formados en las etapas 0 y 1? R: _____________
   b. ¿Cuánto suman las longitudes de los segmentos formados en las etapas 0, 1 y 2? R: _____________
   c. ¿Cuánto suman las longitudes de los segmentos formados en las primeras 10 etapas? R: ______________
   d. ¿Cuánto suman las longitudes de los segmentos formados en las primeras n etapas? R: _____________

B. Cuadrado de Cantor

1. Enseguida se presenta la versión del conjunto de Cantor en el plano, mostrando cada una de sus etapas de evolución. Coloca los datos que se te piden. El cuadrado inicial tiene de lado una unidad.



Etapa 0 Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3 Etapa 4

Etapa 0
No de cuadrados _________
Área _______
Perímetro __________

Etapa 1
No de cuadrados _________
Área _______
Perímetro __________

Etapa 2
No de cuadrados _________
Área _______
Perímetro __________

Etapa 3
No de cuadrados _________
Área _______
Perímetro __________

2. Completa la siguiente tabla con base en la información obtenida anteriormente:

Etapa	**Área**		**Perímetro**	
	Fracciones	**Decimales**	**Fracciones**	**Decimales**
1				
2				
3				
4				
5				
6				
.				
n				

3. A continuación debes encontrar la suma que se te solicita

   a. Suma de las áreas de los cuadrados que se forman en las etapas 0, 1 y 2. De igual manera para el perímetro.
   R: _________________
   b. Suma de las áreas de los cuadrados que se forman en las etapas 0,1,2 y 3. Lo mismo para el caso del perímetro.
   R: __________________
   c. Halla la serie asociada a la suma de las áreas de los cuadrados que se forman en las n primeras etapas. Haz lo

mismo para el caso del perímetro. R: ___________________

Actividad 3: Construcción del conjunto de Cantor a través de la descripción de movimientos.

1. A continuación se definen dos transformaciones T1 y T2 en el plano y la *construcción dinámica* para construir el conjunto de Cantor.

T1 = Reducir a la tercera parte respecto al punto O.

T2 = Trasladar horizontalmente a la derecha 2/3 de unidad.

Construcción dinámica

I. Aplicar T1.

II. Aplicar T1 y T2 de manera consecutiva.

a. Aplica la construcción dinámica sobre el segmento que aparece a continuación. Dibuja la figura resultante sobre la línea de puntos que está debajo de este segmento.

O

....

b. A la figura obtenida anteriormente, aplica las transformaciones T1 y T2. A lo que resulta dibújalo sobre la línea de puntos que aparece a continuación.

....

c. Aplica las transformaciones T1 y T2 a la figura que resultó anteriormente. Dibuja la figura obtenida sobre la línea que aparece a continuación.

....

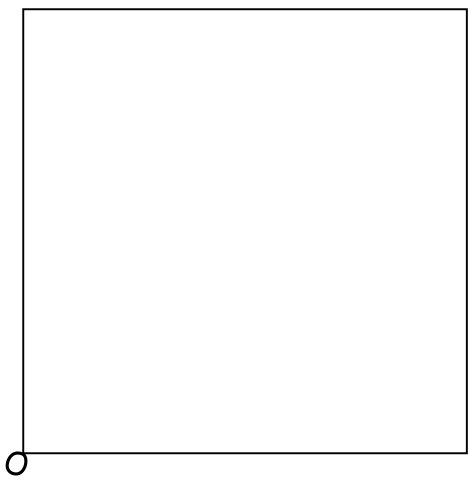
2. La representación análoga del conjunto de Cantor en el plano también puede ser construida por la aplicación de movimientos en el plano descritos verbalmente.

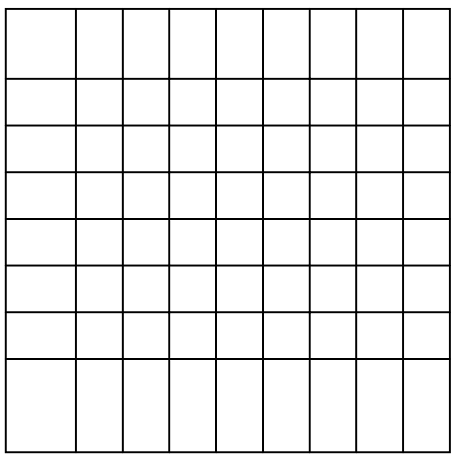
Las transformaciones que se definan son las siguientes:
T1 = reducir a la tercera parte respecto al punto O.
T2 = trasladar horizontalmente a la derecha 2/3 de unidad.
T3 = trasladar verticalmente hacia arriba 2/3 de unidad.

Etapa 1

a. Sobre el cuadrado que aparece dibujado en la figura realiza la instrucción indicada y dibuja la figura resultante sobre la malla que aparece debajo de éste.

   i. Aplica la transformación T1.
   ii. Aplica la transformación T1 y T2.
   iii. Aplica consecutivamente las transformaciones T1 y T3.
   iv. Aplica consecutivamente las transformaciones T1, T2 y T3.





O

Etapa 2

Esta etapa consiste en aplicar las instrucciones descritas en la etapa 1 sobre la propia figura resultante. Aplica la figura obtenida en una malla igual a la anterior y luego píntala de verde.

TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

OBJETIVO:

A través del desarrollo de la presente guía, el estudiante estará en capacidad de

d. Construir el triángulo de Sierpinski mediante la realización de una secuencia de instrucciones.
e. Reconocer patrones numéricos y geométricos subyacentes en el triángulo de Sierpinski.
f. Construir el triángulo de Sierpinski mediante la descripción de movimientos geométricos en el plano.

INTRODUCCIÓN

El triángulo de Sierpinski fue introducido en 1916 por el gran matemático polaco Maclaw Sierpinski (1882 – 1969). Este científico fue uno de los matemáticos polacos más influyente en su época, siendo reconocido a nivel mundial. En su honor, uno de los cráteres de la luna fue bautizado con su nombre. El triángulo de Sierpinski es otro de los fractales clásicos e inicialmente apareció como un ejemplo de una curva en la cual, cada uno de sus puntos es un punto de ramificación. Al igual que con el conjunto de Cantor, los matemáticos han realizado estudios acerca de sus propiedades.

En esta guía construirás el triángulo de Sierpinski en sus primeras etapas y en sus formas alternativas. Encontrarás también patrones numéricos y geométricos que subyacen en su proceso de construcción y utilizarás movimientos en el plano para construir este fractal.

Actividad 1

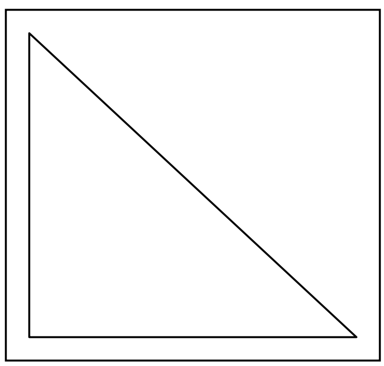
A. Construcción del Triángulo de Sierpinski

1. Dibuja un triángulo equilátero cuyo lado mida 16 cm en una hoja cuadriculada.
2. Señala el punto medio de cada lado y conecta estos puntos mediante segmentos.
3. De los cuatro pequeños triángulos que se han formado, colorea de amarillo el triángulo central.
4. Sobre cada uno de los triángulos que no fueron coloreados realiza nuevamente los puntos 2 y 3.
5. Nuevamente, sobre cada uno de los triángulos que no fueron coloreados, realiza los puntos 2 y 3.
6. A los triángulos que no fueron coloreados de amarillo, píntalos de negro. La región formada por los triángulos coloreados de negro se llama triángulo de Sierpinski de orden 3.
7. Si este proceso se continúa indefinidamente, ¿qué características crees que tendría la figura o triángulo de Sierpinski que iría resultando?

B. Reconstrucción del triángulo de Sierpinski

Malla de puntos

Sobre la siguiente malla de puntos construye el triángulo de Sierpinski de orden 4.



Diseño hoja Bond base 28

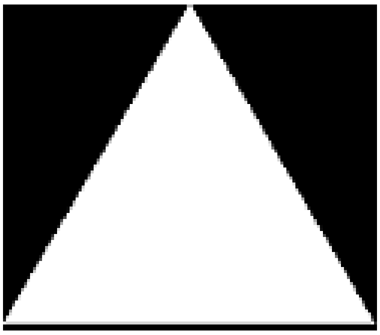
Para esta actividad necesitarás los siguientes materiales: Una hoja bond base 28, un octavo de papel silueta de cualquier color, una cuchilla, regla, borrador y un lápiz.

1. Dibuja sobre la hoja de papel un triángulo equilátero de lado 16 cm.
2. Determina los puntos medios de cada lado y conecta estos puntos mediante segmentos.
3. De los cuatro triángulos que se han formado recorta el triángulo central.
4. Sobre cada uno de los triángulos no recortados repites el punto 2 y 3.
5. Nuevamente, sobre los triángulos no recortados repites el punto 2 y 3. Debes tener cuidado de que al hacer los cortes los triángulos no se desprendan.
6. Una vez más repite el numeral 5.

Actividad 2: Análisis de patrones numéricos y geométricos

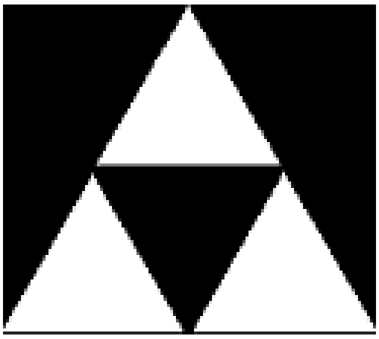
A continuación se ilustran cada una de las etapas del proceso de evolución del triángulo de Sierpinski. Se supone que cada figura se genera de la anterior y que el triángulo es isósceles y sus lados iguales miden una unidad. Para cada una de las etapas escribe los datos que se te piden.

Etapa 0



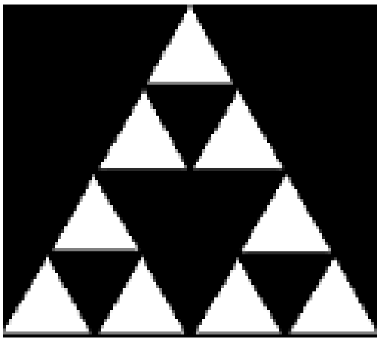
¿Cuántos triángulos hay? R: ______________
¿Cuánto mide la base? R: ______________
¿Cuánto mide la altura? R: ______________
¿Cuánto mide la hipotenusa? R: ______________
¿Cuánto mide el perímetro? R: _____________

Etapa 1



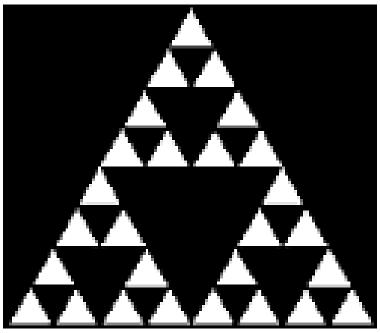
¿Cuántos triángulos hay? R: ______________
¿Cuánto mide la base de cada triángulo? R: _____________
¿Cuánto mide la altura de cada triángulo? R: _____________
¿Cuánto mide la hipotenusa de cada triángulo? R: _____________
¿Cuánto mide el perímetro de cada triángulo? R: ____________
¿Cuánto mide el área de cada triángulo? R: _____________

Etapa 2



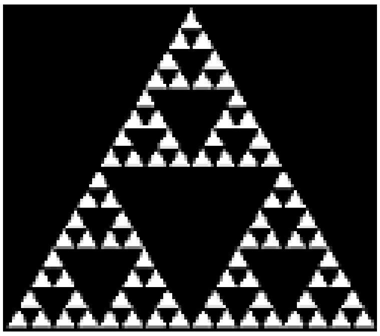
¿Cuántos triángulos hay? R: ______________
¿Cuánto mide la base de cada triángulo? R: _____________
¿Cuánto mide la altura de cada triángulo? R: _____________
¿Cuánto mide la hipotenusa de cada triángulo? R: _____________
¿Cuánto mide el perímetro de cada triángulo? R: ____________
¿Cuánto mide el área de cada triángulo? R: _____________

Etapa 3



¿Cuántos triángulos hay? R: ______________
¿Cuánto mide la base de cada triángulo? R: _____________
¿Cuánto mide la altura de cada triángulo? R: _____________
¿Cuánto mide la hipotenusa de cada triángulo? R: _____________
¿Cuánto mide el perímetro de cada triángulo? R: ____________
¿Cuánto mide el área de cada triángulo? R: _____________

Etapa 4



¿Cuántos triángulos hay? R: _______________
¿Cuánto mide la base de cada triángulo? R: _____________
¿Cuánto mide la altura de cada triángulo? R: ______________
¿Cuánto mide la hipotenusa de cada triángulo? R: _____________
¿Cuánto mide el perímetro de cada triángulo? R: ____________
¿Cuánto mide el área de cada triángulo? R: ______________

3. Con base en los datos recogidos anteriormente completa la siguiente tabla:

Etapa	**No triángulos**	**Base**	**Altura**	**Perímetro**	**Área**
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
.					
.					
n					

Actividad 3: Construcción del triángulo de Sierpinski mediante la descripción de movimientos en el plano.

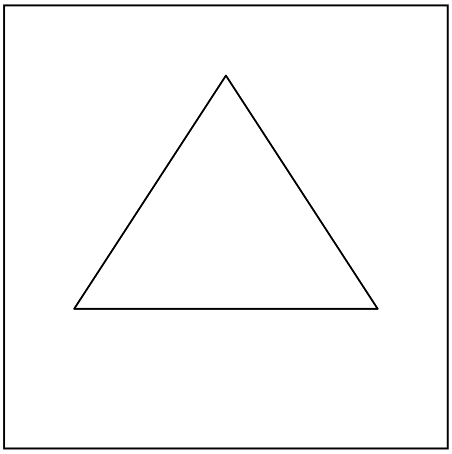
A continuación se definen las transformaciones rígidas del plano a partir de las cuales se construye el triángulo de Sierpinski.

T1: Reducir la tercera parte respecto al punto 0.
T2: Trasladar horizontalmente a la derecha $\frac{1}{2}$ de unidad.
T3: Trasladar horizontalmente a la derecha $\frac{1}{4}$ de unidad.
T4: Trasladar verticalmente hacia arriba $\sqrt{3}/4$ de unidad.

Enseguida se da el conjunto de instrucciones básicas para construir el triángulo de Sierpinski.

i. Aplica la transformación T1.
ii. Aplica la transformación T1 y T2.
iii. Aplica la transformación T1, T2 y T3.

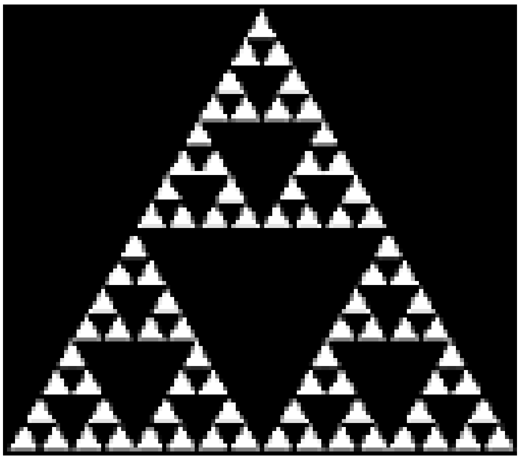
1. Sobre la figura que aparece a continuación aplica el conjunto de instrucciones básicas. El resultado dibújalo en la malla que aparece en el lado derecho.



2. Aplica nuevamente el conjunto de instrucciones básicas sobre la figura obtenida en la malla dibujada en el punto 1.

3. Aplica nuevamente el conjunto de instrucciones básicas sobre la figura obtenida en la malla dibujada en el punto 2.

4. Definir las transformaciones que dan origen a la siguiente versión del triángulo de Sierpinski.



T1: ____

T2: ____

T3: ____

5. Para el anterior Triángulo de Sierpinski describe el conjunto de instrucciones básicas a partir de las cuales se puede construir.

i. ____

ii. ____

iii. ____

CONCLUSIONES

El desarrollo de actividades en matemáticas que presenten como centro la construcción de conocimiento y no la simple transmisión de información permiten generar en los estudiantes un mayor nivel de motivación y le brinda la posibilidad de desarrollar procesos de pensamiento por medio de contenidos novedosos.

La construcción de los fractales es un apoyo grande a la nivelación que necesita el estudiante próximo a presentar una prueba de Estado ya que le posibilita el acercarse nuevamente a conceptos no vistos o ya olvidados, no desde una visión memorística sino en la aplicación de estos conocimientos y el desarrollo de competencias básicas.

Es necesario desarrollar todo el trabajo con los fractales ya que hace un acercamiento mayor a lo que hoy se debería enseñar en geometría con la aplicación de otros pensamientos de la matemática como el numérico y el variacional.

BIBLIOGRAFÍA

Mandelbrot, Benoit. *La geometría fractal de la naturaleza*. Colección Metatemas. Tusquets Editores. Barcelona. 1997.

Mandelbrot, Benoit. Los objetos fractales. Colección Metatemas. Tusquets Editores. Barcelona. 1993.

Estrada, William Fernando. Geometría Fractal. Colección Didácticas. Editorial Magisterio. Bogotá. 2004.

Diversas paginas Web Internet.

Jorge Eliécer Villarreal Fernández
jorgevf2005@gmail.com
Licenciado en Matemáticas Universidad de Antioquia, Colombia
Docente en Matemática y Física
Asesor educativo en las instituciones de la ciudad de Medellín
Especialista en Constructivismo y Educación de la Facultad Latinoamérica de Ciencias Sociales-FLACSO, Argentina