ECUACIONES DE MAXWELL

Hugo A. FERNÁNDEZ

El presente capítulo fue elaborado asumiendo que el lector maneja el análisis vectorial y tiene los conocimientos de electricidad y magnetismo que se adquieren en un curso inicial. En consecuencia, no trataremos las definiciones de los campos ***E***, ***D***, ***B*** y ***H*** ni discutiremos aquellos fenómenos básicos que pueden encontrarse en la abundante bibliografía existente. Como libros de referencia destacamos los siguientes:

- J. Jackson – *"Electrodinámica Clásica"*.
- A. Sommerfeld, vol. 3 – *"Electrodynamics"*.
- L. Landau et al; vol. 8 – *"Electrodynamics of Continuous Media"*.

El objetivo central de este trabajo es elaborar una discusión conceptual profunda de los Postulados del Electromagnetismo, es decir las Ecuaciones de Maxwell, aspecto que no suele tratarse con la atención necesaria.

INTRODUCCIÓN

La Teoría Electromagnética del físico escocés James Clerk Maxwell (1831-1879) es una de las obras intelectuales más importante en la historia de las ciencias. Su aparición se inicia en 1861 (*"On Physical Lines of Force"*) y se completa en un tercer trabajo en 1865 (*"A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field"*). Es interesante remarcar que en esa época ya se conocían muchas leyes individuales sobre el comportamiento de la Electricidad y el magnetismo, pero no se tenía una teoría formal que usando el menor número posible de Postulados explicara los fenómenos de naturaleza electromagnética conocidos.

Maxwell supo seleccionar cuatro fenómenos básicos fundamentales como Principios, con los cuales armó un modelo físico matemático capaz de explicar la totalidad de las leyes en esa disciplina y predecir fenómenos desconocidos.

Esta teoría es considerada el nacimiento de la Física Moderna debido a que sus consecuencias incidieron drásticamente en todas las ramas de la Física, ya sea permitiendo fijar las condiciones de validez de los modelos existentes o generando bases conceptuales más profundas. Además de conformar un modelo completo para los fenómenos clásicos del electromagnetismo, explicó de manera consistente toda la óptica ondulatoria y, en parte, la naturaleza de la luz. Predijo la existencia de ondas electromagnéticas y demostró que el campo es un ente físico real e independiente de la materia.

El desarrollo del Electromagnetismo permitió comprender el mecanismo de interacción entre cuerpos, invalidando la denominada "acción a distancia" que implícitamente establecía la Ley de Coulomb. Nótese que si en la ley de Coulomb una de las dos cargas modificara su valor, la fuerza sobre la otra carga cambiaría simultáneamente, lo que implica una acción a velocidad infinita entre las cargas, mecanismo mágico que no soporta razonamiento alguno.

La interpretación de las interacciones entre cuerpos por medio de campos asociados que se propagan a velocidad finita, hoy llamada interacción "campo-partícula", resultó consistente con el Principio de Causalidad y con la posterior Teoría de Relatividad Especial, por lo cual se lo asumió de validez general e independiente de la naturaleza particular del fenómeno.

Por último corresponde señalar que la Teoría de Relatividad Especial está implícita en las ecuaciones de Maxwell pues ellas se cumplen con rigor en todos los sistemas inerciales, lo que permite deducir naturalmente las Transformaciones de Lorentz como relaciones únicas de transformación de coordenadas entre sistemas inerciales.

La formulación moderna del electromagnetismo fue elaborada en 1884 por el gran científico autodidacta Olivier Heaviside (1850-1925), para lo cual estructuró el análisis vectorial y replanteó la formulación de Maxwell, llevándola a la forma que trata la bibliografía actual mediante ecuaciones diferenciales a derivadas parciales.

FUNDAMENTOS DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Los cuatro fenómenos básicos tomados como Postulados del electromagnetismo son:

1 – Ley de Faraday sobre la fuerza electromotriz inducida
Esta ley fue descubierta por Michael Faraday en 1831, quien se desempeñaba como encargado del pañol del laboratorio (ordenanza) de la *"Royal Institution"* de Inglaterra, usando un diseño propio muy simple, como muestra la figura 1.

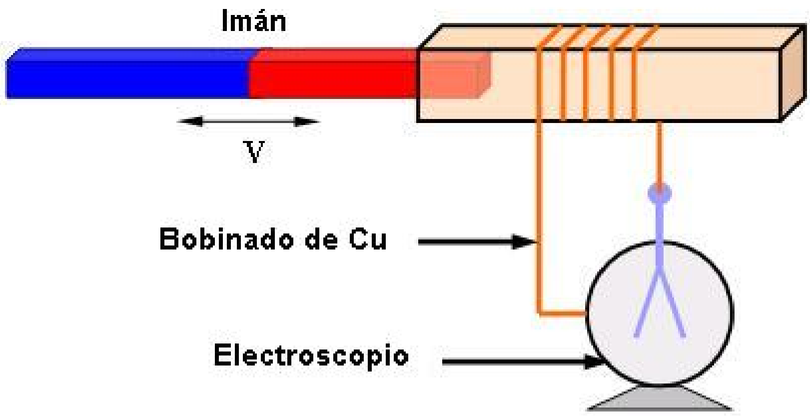

Figura 1 – Dispositivo de Faraday

Al mover el imán dentro del cartón, que tenía enrollado un alambre de cobre, las láminas metálicas del electroscopio se abrían, indicando la acumulación de cargas eléctricas en ambas hojuelas como consecuencia de una corriente eléctrica por el alambre de cobre, simultánea con el movimiento. Ello nos indica que en el conductor de cobre existe un campo eléctrico, condición que sólo se cumple cuando hay movimiento relativo entre el imán y el conductor.

De esta manera contundente Faraday descubrió que la electricidad y el magnetismo se relacionaban funcionalmente si los campos eran variables en el tiempo.

La forma matemática de la ley de Faraday es:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$$

El primer miembro (circulación del campo eléctrico) es la definición de la denominada fuerza electromotriz inducida en el conductor, siendo C la curva definida por el alambre de cobre. El segundo miembro es la variación temporal (debida al movimiento del imán) del flujo magnético a través de la superficie que tiene por borde a la curva C.

Debe destacarse que inicialmente esta importante ley fue mal interpretada, asumiendo que el campo eléctrico era "creado" por el campo magnético variable, como si fueran causa y efecto, sin reconocer que el comportamiento de ambos campos (***E*** y ***B***) está provocado por el movimiento relativo (causa). Este error, que aún figura en muchos

2 – Ley de Gauss-Faraday sobre inducción eléctrica

Los experimentos de inducción eléctrica realizados por Faraday (antes del año 1831) mostraron que si una carga Q es encerrada por un recipiente conductor inicialmente neutro, pero sin establecer contacto directo con el cuerpo cargado (ver figura 2), el recipiente conductor reordena sus cargas (fenómeno de inducción) de tal manera que las superficies interior y exterior del recipiente quedan cargadas con signo opuesto.

La carga total inducida en cada superficie resulta de magnitud exactamente igual a la de la carga encerrada.

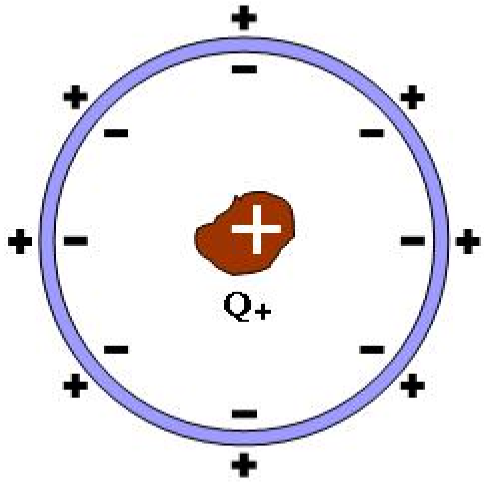

Figura 2 – Fenómeno de inducción

El hecho de que la carga inducida en cada superficie sea igual en magnitud a la carga encerrada es algo realmente asombroso, que nos muestra aspectos fundamentales de la electricidad.

Los variados experimentos de Faraday sobre inducción permitieron comprender que los medios conductores poseen una cantidad inmensa de cargas libres en su interior que pueden reordenarse, y mostraron que la carga neta de un conductor permanece constante ante fenómenos inductivos, confirmando la conservación de la carga.

Asimismo, se verificó que para cuerpos en reposo el interior de los conductores es neutro, sin campo eléctrico, aún en presencia de cuerpos externos cargados. Ello implicaba que en el interior de un medio conductor el campo electrostático es nulo, por lo cual la carga inducida sobre su superficie debe anular la acción de cualquier carga, externa o encerrada, fenómeno que se conoce como "apantallamiento".

La expresión matemática de esta ley fue dada por Gauss y reformulada por Heaviside con la actual forma vectorial, utilizando el campo de "inducción" ***D***, que fuera definido y medido por Faraday, cuyo módulo en un punto cualquiera del espacio representa la densidad de carga inducida máxima que podría obtenerse si ubicáramos una plaquita metálica (transversal al campo).

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{V} \rho \, dV$$

El primer miembro es el flujo del campo ***D*** a través de cualquier superficie que encierre la carga *Q*, mientras que el segundo miembro representa la carga total encerrada.

Nótese que hemos asumido que la carga de un cuerpo puede ser representada por una función continua integrable, la densidad volumétrica de carga (*p*), suposición que entra en conflicto con la naturaleza discreta de la electricidad. No obstante, la validez matemática de la ley de Gauss-Faraday y su aplicación quedan satisfechas con la generalización de la integración elaborada por Stieltjes.

3 – La ley de Ampère

Hasta el año 1820 se pensaba que la electricidad y el magnetismo eran fenómenos no relacionados.

En una conferencia que daba el dinamarqués Oersted (para conseguir fondos para sus proyectos), justamente mientras intentaba mostrar dicha independencia, posó una brújula sobre un conductor con corriente provocando que la aguja se orientara de manera transversal al conductor. Así, de casualidad, descubrió que una corriente eléctrica está rodeada por un campo magnético (ver figura 3).

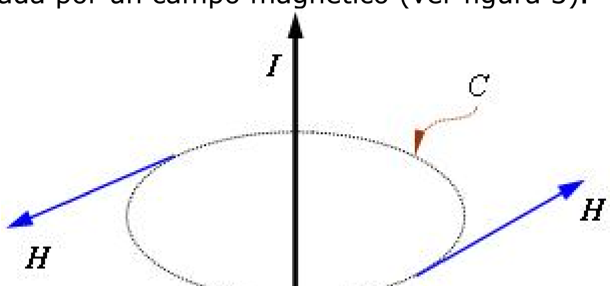

Figura 3 – Ley de Ampère

Luego, Oersted repitió el experimento ante sus alumnos y, aunque no logró dar una explicación satisfactoria, lo publicó.

Fue el gran físico matemático francés A. Ampère (1775-1836) quien interpretó y dio la expresión matemática del fenómeno (que lleva su nombre), además de proponer a las corrientes como única "causa" del magnetismo, propuesta conocida como la *Hipótesis de Ampère*.

Hoy sabemos que las corrientes eléctricas y el campo magnético asociado no son causa y efecto ya que ambos, corriente y campo, aparecen simultáneamente con el movimiento (causa) de cargas.

Matemáticamente la ley de Ampère se expresa:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

El primer miembro es la circulación de ***H***, siendo *C* cualquier curva cerrada que rodee a la corriente *I* concatenada. Esta ley es válida sólo para corrientes constantes.

La ley de Ampère puede ser expresada usando el vector densidad de corriente, cuya relación con la corriente está dada por:

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{\sigma}$$

Siendo S la sección del conductor donde circula la corriente. Dado que el contorno *C* de la ley de Ampère encierra la corriente y que fuera del conductor el vector ***J*** es nulo, podemos extender el recinto de integración hasta el borde *C*, quedando:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{\sigma}$$

Nótese que si la corriente es constante, ***J*** debe ser estacionario, es decir no depender del tiempo.

4 – No existencia de monopolos magnéticos

La experiencia mostró que no existen polos magnéticos aislados. Si un imán se parte al medio se obtienen dos imanes de menor intensidad.

Esto muestra una particular propiedad del campo magnético (***B***), cuyas líneas de fuerza son necesariamente cerradas pues no tienen ni fuentes ni sumideros.

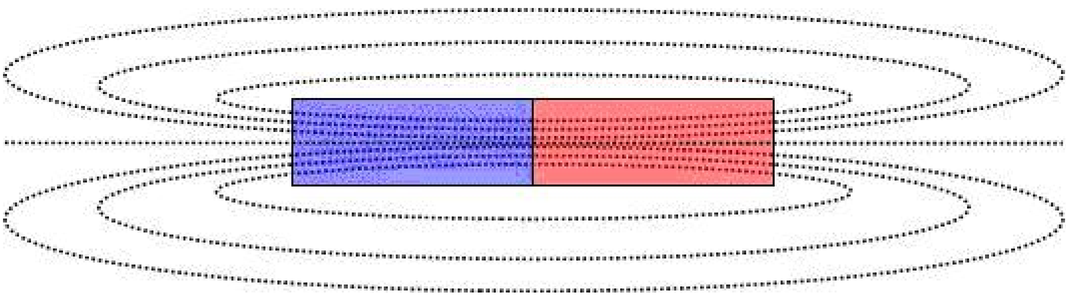

Figura 4 – Líneas de fuerza de *B*

ECUACIONES DE MAXWELL

Los tres primeros fenómenos descritos responden a ecuaciones integrales, es decir que su cumplimiento requiere conocer el recinto de integración y su cálculo particular.

Las ecuaciones integrales son muy elegantes pero no son válidas en un punto ya que describen un fenómeno extenso, por lo cual no siempre es posible encontrar una relación funcional válida punto a punto entre las magnitudes que intervienen en una ecuación integral.

El primer mérito destacable de Maxwell fue justamente lograr una descripción (leyes) de los fenómenos anteriores mediante **ecuaciones diferenciales**, en una época en que aún no se había desarrollado el análisis vectorial.

Recordemos que si una ecuación integral presenta el mismo recinto de integración en ambos miembros, sus integrandos son iguales. En consecuencia, si logramos expresar una ecuación integral con un único recinto de integración, lograremos obtener la ley con una ecuación diferencial

Por razones didácticas veamos el procedimiento que elaboró Heaviside para tal fin.
Usaremos dos teoremas centrales del análisis vectorial.

Por razones didácticas veamos el procedimiento que elaboró Heaviside para tal fin.

Usaremos dos teoremas centrales del análisis vectorial.

- -Teorema de Gauss

$$\oiint_{\Sigma} \vec{A} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{V} \nabla \vec{A}\, dV$$

La superficie encierra el volumen

- -Teorema de Stokes

$$\oint_{C} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{\sigma}$$

La curva es el contorno de la superficie

Estos dos teoremas deben ser tratados como igualdades sin interpretarlos "físicamente" de manera ridícula y forzada como suelen hacer varios autores, es decir que hacer el cálculo del primer miembro da un resultado exactamente igual al cálculo del segundo miembro, y nada más.

Lo realmente importante de estos teoremas es el cambio de dimensión en la igualdad establecida (cambio de recinto de integración).

El teorema de Gauss pasa de un cálculo sobre una superficie (2 dimensiones) a uno en un volumen (3 dimensiones).

En la igualdad de Stokes se pasa de un cálculo sobre una curva (1 dimensión) a uno sobre una superficie (2 dimensiones).

1 - Primera Ecuación de Maxwell
Partimos de la Ley de Faraday sobre la fuerza electromotriz inducida.

$$\oint_{C} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$$

Usando el Teorema de Stokes queda:

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = -\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}$$

Si en el segundo miembro pudiéramos conmutar las operaciones de derivada temporal y la integral, podríamos igualar los integrandos de la ecuación porque tienen el mismo recinto de integración.

Para ello debemos exigir que dicho recinto no dependa del tiempo, lo que físicamente significa que los puntos de la superficie de integración se mantengan estacionarios.

En ese caso quedará:

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = -\iint_{\Sigma} \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{\sigma}$$

Como los puntos de interés deben estar en reposo se cumple:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ahora podemos igualar los integrandos obteniendo la primera ecuación de Maxwell.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Nótese que es una ecuación vectorial lo que implica tres ecuaciones escalares.

El artificio que usamos para llegar a una ecuación diferencial tiene su precio, ya que impone una condición de validez que la Ley (integral) de Faraday no tiene, ello es que la ecuación debe ser aplicada en **puntos en reposo**.

Ahora podemos analizar la relación entre los campos en un punto fijo del espacio.

Esta ecuación nos muestra que en un punto cualquiera pueden coexistir ***E*** y ***B***, con sus formas funcionales relacionadas por la ecuación dada.

En rigor, si muevo un imán o una carga tendré ambos campos, magnético y eléctrico, en todos los puntos del espacio. El fenómeno ocurre en todo el espacio y no necesita que en el punto haya un conductor, otra carga u otro imán que, en el caso de existir, sólo pondrían en evidencia el fenómeno pues habría interacción campo-objeto.

2 – Segunda ecuación de Maxwell

Partimos de la ley de Gauss-Faraday sobre inducción eléctrica.

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{V} \rho \, dV$$

Usando el teorema de Gauss queda:

$$\iiint_{V} \nabla \cdot \vec{D} \, dV = \iiint_{V} \rho \, dV$$

Dado que las integrales tienen el mismo recinto de integración podemos igualar los integrandos y obtenemos la segunda ecuación de Maxwell.

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Esta ley escalar nos indica que las fuentes del campo ***D*** son las cargas positivas y los sumideros las cargas negativas. El campo eléctrico asociado a una carga nace en ella (si es positiva) o muere en ella (si es negativa).

3 -Tercera ecuación de Maxwell. La Hipótesis de Maxwell

Partimos de la ley de Ampère

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{\sigma}$$

Usando el teorema de Stokes queda:

$$\iint_\Sigma \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{\sigma}$$

Dado que las integrales tienen el mismo recinto de integración podemos igualar los integrandos y obtenemos la llamada "Ley de Ampère microscópica".

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

Como la ley de Ampère vale sólo para corrientes constantes, la anterior ecuación es válida si el vector ***J*** es estacionario.

Cabe preguntarse como será la ecuación en el caso general. No tenemos elementos de juicio o experimentos que nos permitan contestar el requerimiento para corrientes variables en el tiempo.

No obstante, hay un razonamiento que puede ayudarnos a encontrar la respuesta. Se basa en el Principio de Conservación de la carga, por lo cual se acepta que la carga neta total del Universo permanece constante. En consecuencia, si en un volumen dado la carga neta cambió, ello indica que ha salido o entrado carga desde el exterior al volumen elegido, implicando corrientes durante el cambio.

Tomemos una superficie cerrada cualquiera y calculemos el flujo de ***J*** a través de ella.

Si da positivo (negativo) indica que está saliendo (entrando) carga, si da cero la carga neta en su interior permanece constante. Fácilmente podemos establecer la siguiente relación:

$$\oiint_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{\sigma} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \, dV$$

Siendo la integral del segundo miembro la carga neta en el volumen *V*. Aplicando el teorema de Gauss obtenemos

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{J}\, dV = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho\, dV$$

Para poder igualar los integrandos de esta ecuación integral, debemos lograr que conmuten la derivada temporal con el cálculo integral en el segundo miembro. Para ello bastará con pedir que los límites de integración no dependan del tiempo, condición que se cumple si los puntos que pertenecen al volumen permanecen en reposo.

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{J}\, dV = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

$$\Rightarrow \qquad \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Esta última ecuación diferencial escalar se conoce como *Ecuación de Continuidad*, y tiene validez general.

De acuerdo con la segunda ecuación de Maxwell, la densidad de carga en un punto está dada por la divergencia de ***D*** en dicho punto, lo que permite la siguiente relación:

$$\nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Ahora podemos proponer cómo será la ley de Ampère generalizada (tercera ecuación de Maxwell). Dado que la divergencia de un rotor es siempre nula, la única manera de lograr que se cumplan la ley de Ampère microscópica y la ecuación de continuidad es agregando la variación temporal de ***D*** en el segundo miembro de la ley.

Nótese que en el caso estacionario (corriente constante) queda la ley clásica de Ampère.

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Como} \quad \nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{H} \right) = 0 \quad \text{quedará} \quad 0 = \nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad \text{Ecuación de continuidad.}$$

La variación temporal de ***D*** agregada por Maxwell es llamada *corriente de desplazamiento*, horrible y confusa denominación que usa alguna bibliografía. Esta denominada corriente de desplazamiento no es una corriente eléctrica.

Lo más significativo de la genial Hipótesis de Maxwell es que al poner la variación temporal de ***D*** en la tercera ecuación está incorporando la existencia de ondas electromagnéticas, tal como Maxwell deseaba pues estaba convencido que la luz tenía naturaleza electromagnética.

La existencia de ondas electromagnéticas es un aspecto tan importante que la relación entre la Hipótesis de Maxwell y la existencia de ondas será tratada por separado

4 – Cuarta ecuación de Maxwell
Si aceptamos que las líneas de fuerza del campo magnético son cerradas, hecho verificado experimentalmente, la expresión matemática es inmediata pues el campo magnético B no tiene fuentes ni sumideros. En consecuencia, su divergencia es nula.

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

RESUMEN

Las cuatro ecuaciones de Maxwell, descritas por Heaviside, son consideradas los Principios de la Teoría Electromagnética, que corresponden a cuatro fenómenos básicos que no tienen demostración teórica. Es importante recalcar que de estas ecuaciones se deducen todas las leyes conocidas del electromagnetismo, conformando una teoría clásica completa.

Ellas son:

$$1- \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$2- \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$3- \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$4- \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Estudios posteriores mostraron que si aceptamos el Principio de Conservación de la carga, las ecuaciones escalares 2 y 4 son demostrables, dejando de ser postulados, por lo cual en este modelo sólo tendríamos dos ecuaciones vectoriales independientes (1 y 3), es decir seis ecuaciones escalares. No obstante, es usual que la bibliografía especializada continúe tratando a las cuatro ecuaciones de Maxwell como Postulados de la teoría.

Las ecuaciones son lineales y sólo son aplicables con rigor en puntos en reposo en un sistema inercial. Esto último no debe llevar a confusión, la validez de las ecuaciones es para puntos en reposo pero, una vez conocidos los campos, sus efectos sobre cargas externas (o corrientes) en movimiento es calculable mediante la Fuerza de Lorentz.

LOS CAMPOS E, D, B y H

Un tema que no suele tratarse en la bibliografía es la necesidad de explicar los fenómenos electromagnéticos usando dos campos para la electricidad y dos para el magnetismo. ¿Por qué no tenemos un único campo para la electricidad o el magnetismo?

La respuesta es inmediata si recordamos, por ejemplo, que el campo eléctrico ***E*** sociado a una carga en reposo resulta diferente si el medio es aire o agua. En consecuencia, conocer el campo ***E*** en todo el espacio no es suficiente para saber el valor de dicha carga asociada en reposo (fuente). Análogamente, si conocemos el campo ***D*** en todo el espacio podremos calcular las fuentes pero no podemos determinar la fuerza que aparecería sobre otra carga externa.

Brevemente, ya sea en electricidad o en magnetismo, un campo permite tratar las acciones y el otro está referido a sus fuentes.

En general, podemos clasificar los campos en intensivos (***E*** y ***B***) y extensivos (***D*** y ***H***).

De manera simplificada podemos indicar:

- Fenómenos eléctricos

E para determinar acciones.-------***F*** = *q* ***E*** (Fuerza eléctrica)

D para calcular las fuentes.-------- $\oint\!\!\oint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\sigma} = \iiint_{V} \rho \, dV$ (Ley de Gauss-Faraday)

- Fenómenos magnéticos

B para determinar acciones.-------***F*** = *q* ***v*** *x* ***B*** (Fuerza magnética)

H para calcular las fuentes.-------- $\oint_{C} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$ (Para el caso *I* constante)

La relación entre los campos correspondientes permite caracterizar los medios, cuyo comportamiento queda establecido midiendo ambos campos relacionados.

Por ejemplo, el vacío queda caracterizado eléctricamente mediante su *constante dieléctrica*, y magnéticamente a través de su *permeabilidad magnética*, cumpliéndose:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \varepsilon_0 \equiv \text{constante dieléctrica}$$
$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \qquad \mu_0 \equiv \text{permeabilidad magnética}$$

Nota:
Debe quedar claro que para determinar estas constantes del vacío es necesario medir los cuatro campos.

Si pretendemos que las ecuaciones de Maxwell sean generales, es decir válidas para todos los medios y geometrías arbitrarias, su formulación deberá tener explícitamente los cuatro campos electromagnéticos.

SOLUCIÓN FORMAL DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL

Diremos que un problema matemático tiene solución formal si reúne las condiciones y requisitos mínimos, necesarios y suficientes, para tener una posible solución.

De ninguna manera debe suponerse que si un problema dado tiene solución formal, dicha solución será obtenida, pues ello dependerá de las dificultades metodológicas del cálculo necesario.

Encontrar la solución rigurosa de un capacitor plano infinito es un problema simple, pero si le damos un martillazo a una placa haciéndole una pequeña deformación, con la abolladura se complicó el cálculo y, muy probablemente, también se acabó la solución rigurosa aunque tenga solución formal.

En general, la simetría juega un papel muy importante en la resolución de los problemas en electromagnetismo.

Veamos que requisitos mínimos necesitamos para tener posibilidades de solución de un problema arbitrario.

Supongamos conocidas la función densidad de carga y la geometría del problema.

Nuestras incógnitas ***E***, ***D***, ***B***, ***H*** y ***J*** son quince funciones escalares y sólo tenemos seis ecuaciones escalares independientes (ecuaciones de Maxwell 1 y 3), es decir que nos faltan nueve ecuaciones escalares independientes para tener un sistema de ecuaciones resoluble.

Estas nueve ecuaciones faltantes las proveen los medios que intervienen en el problema, a través de las denominadas *"Ecuaciones Constitutivas"*, que son:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \varepsilon \equiv \text{constante dieléctrica}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H} \qquad \mu \equiv \text{permeabilidad magnética}$$
$$\vec{J} = \chi \vec{E} \qquad \chi \equiv \text{conductividad eléctrica}$$

En los medios homogéneos e isótropos los tres parámetros (ε, μ, χ) son constantes y su conocimiento facilita la resolución de las ecuaciones, ya que tenemos sólo seis incógnitas, por ejemplo ***E*** y ***B***.

La condición de homogeneidad de un medio suele estar relacionada con la temperatura del mismo, requiriendo temperatura constante, mientras que la de isotropía se vincula con la estructura de la sustancia que compone el medio. En general, los medios no cristalinos o amorfos son isótropos, mientras que ciertos medios de estructura cristalina, como el cuarzo, son anisótropos y sus "constantes" constitutivas son representadas por un tensor.

Resumiendo, la solución formal de un problema arbitrario requiere el conocimiento (mínimo) de los medios que intervienen, con sus condiciones de contorno, la geometría del problema y la densidad volumétrica de carga.

Cumplido esto, la solución concreta dependerá de las dificultades de cálculo.

LA HIPÓTESIS DE MAXWELL Y LA EXISTENCIA DE ONDAS

La primera ecuación de Maxwell, que se cumple en todo punto del espacio en reposo, describe un fenómeno que debemos analizar en detalle de manera conceptual.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Supongamos que tenemos un imán en movimiento armónico, por lo cual se verifica que hay un campo magnético dependiente del espacio y del tiempo en todo punto del espacio. Desconocemos de qué manera el movimiento del imán (y su campo) se transmite a los puntos fuera del imán, modificando el valor existente del campo en cada punto. Veremos que la Hipótesis de Maxwell resuelve el misterio.

Desde un punto de vista matemático, en un punto cualquiera del espacio y en un instante dado, la derivada temporal de ***B*** existirá siempre y cuando exista campo magnético antes y después del instante elegido, pues para que exista derivada temporal la función debe estar definida en el entorno (temporal). Simultáneamente existirá también en ese punto un campo eléctrico cuyo rotor es, en módulo, igual a la derivada temporal del campo magnético pero, dado que el rotor requiere derivadas espaciales, este campo eléctrico variará también en el entorno del punto. Aunque es algo burda, la representación de la figura 5 permite entender el proceso, el campo ***B*** varía temporalmente en el punto *P* y el campo ***E*** lo hace también en el entorno espacial.

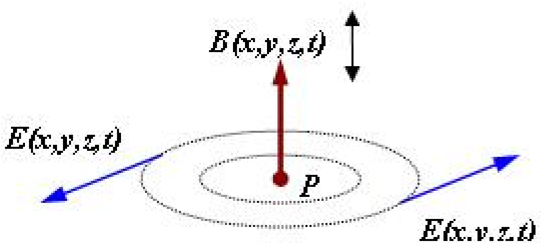

Figura 5

Se concluye que si en un punto del espacio hay un campo magnético variable en el tiempo, en el entorno del punto habrá también un campo eléctrico variable. Esto no es suficiente para transmitir la perturbación magnética a un punto contiguo, a menos que exista otro proceso similar al estudiado pero con los campos conmutados, es decir que un campo eléctrico variable en el tiempo coexista con uno magnético variable en el entorno espacial.

Exactamente este nuevo proceso es el que provee la Hipótesis de Maxwell incorporada en la tercera ecuación.

Este mecanismo de vinculación entre campos variables en el tiempo, históricamente se lo denominó *concatenación de campos*, lo que es una manera tonta de decir propagación ondulatoria.

La Hipótesis de Maxwell no sólo explica cómo se transmiten las perturbaciones, también predice la existencia de ondas independientes de la materia.

EL NACIMIENTO DE LAS ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Pasemos a la sala de parto para asistir al nacimiento del campo, uno de los acontecimientos más importante en la historia de las ciencias.

Supongamos estar en el vacío, es decir sin materia ni cargas ni corrientes, y asumamos válidas y sin restricciones las ecuaciones de Maxwell que, en estas condiciones, son las siguientes:

$$1- \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$2- \quad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$3- \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \, \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$4- \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Cabe esperar que los campos sean idénticamente nulos en todo el espacio, puesto que, además de ser la solución trivial de las ecuaciones planteadas, estamos acostumbrados a asociar los campos con sus fuentes, en este caso inexistentes.

Una vez más la intuición nos engaña pues, como veremos, este sistema de ecuaciones tiene solución distinta de cero, siendo ello un resultado asombroso y extraordinario por el cual el campo electromagnético adquiere categoría de ente físico real. Veamos la demostración matemática.

Aplicando la igualdad vectorial

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{A}\right) = \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \vec{A}\right) - \nabla^2 \vec{A}$$

en ambos miembros de la primera ecuación de Maxwell, resulta:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla \times \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

Usando la segunda ecuación (divergencia nula) y considerando que la derivada temporal y el rotor son operaciones que conmutan pues operan sobre variables independientes, queda:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right)$$

Finalmente, reemplazando el rotor (tercera ecuación) obtenemos

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \, \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Esta es una ecuación vectorial de ondas, es decir tres ecuaciones escalares de D'Alembert, que admiten solución no nula.

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \qquad \text{Ecuación de D'Alembert}$$

Siendo v la velocidad de propagación. Por ejemplo, una solución simple es la de una onda plana propagándose según el eje x.

Onda Plana Monocromática

$$\Phi(x,t) = \Phi_0 \sin(kx - \omega t)$$

En el caso electromagnético es :

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_0 \sin(kx - \omega t)$$

Por comparación con la ecuación de D'Alembert, podemos determinar la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío, cálculo simple que da como resultado (maravilloso) la velocidad de la luz:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\varepsilon_0}} = c$$

Análogamente, haciendo el mismo procedimiento completo a partir de la tercera ecuación, llegamos a la siguiente relación:

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu_0\,\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Los campos ***E*** y ***B*** se propagan, como era obvio de acuerdo al análisis de la Hipótesis de Maxwell, en conjunto

Ha nacido el bebé que cambió la física newtoniana. El campo electromagnético tiene existencia propia, independiente de la materia, pero sólo en forma de onda.

Estudios más avanzados (Teorema de Poynting) demuestran que una onda posee energía y cantidad de movimiento. En consecuencia, no puede aparecer de la nada pues ello violaría Principios Universales aceptados, tal como el de conservación de la energía.

Asimismo, se demuestra que para que exista una onda electromagnética debemos tener aceleración de su fuente (cargas), lo que implica que la onda aparece como un efecto de un proceso causal y, una vez creada, es un ente físico independiente tan real (o más real) que la fuente que lo originó.

Cualquier otro caso de campo estacionario estará asociado siempre a sus fuentes.

Hugo A. Fernández
hafernandez@fibertel.com.ar
Profesor Titular de Física Moderna
Universidad Tecnológica Nacional - Argentina