

¿Cómo se modela un sistema de osciladores acoplado?

Barreiro, Nadia Luisina; Laborde, Cecilia

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Enero de 2009

El objetivo fundamental de este trabajo fue profundizar el estudio del comportamiento oscilatorio de un sistema dado que es de suma importancia para la mejor comprensión de fenómenos más complejos.

Para analizar este fenómeno se realizó una experiencia en la cual dos móviles conectados mediante un resorte y a su vez vinculados a dos sensores de fuerza mediante otro par de resortes, pueden oscilar de forma acoplada unidimensionalmente.

Para extraer más información de la experiencia se introdujeron modificaciones en el montaje como la alteración de la combinación de masas y del ángulo formado entre la plataforma de desplazamiento del sistema y la horizontal.

Finalmente, corroboramos para todos los casos que existen dos modos propios de oscilación del sistema correspondiéndose con los resultados de las ecuaciones diferenciales de movimiento de estos móviles. Asimismo, se pudo observar que cualquier otra oscilación del mismo sistema se puede describir como una combinación de estos modos propios.

Introducción

En este trabajo se planteó estudiar el comportamiento oscilatorio de un sistema, observando los diversos modos de movimiento realizables; y por otro lado, evaluar como es afectado el sistema al introducir variaciones sustanciales en las variables que rigen el comportamiento de éste (como son la alteración de las masas de los móviles o de las fuerzas sobre él). Ya que la conducta oscilatoria se puede observar en diversos fenómenos físicos, es posible modelar situaciones complejas mediante la utilización de elementos sencillos como osciladores armónicos. Por este motivo resulta atrayente analizar el comportamiento del sistema propuesto. Para ilustrar este fenómeno se realizó un experimento que consistió básicamente en dos móviles vinculados entre ellos y con dos puntos fijos mediante resortes. De esta forma el desplazamiento resulta unidimensional en la dirección de los resortes (ver figura 1). Este montaje nos permitirá verificar que existen modos de oscilación propios del sistema y otros

que están compuestos por combinación de éstos.

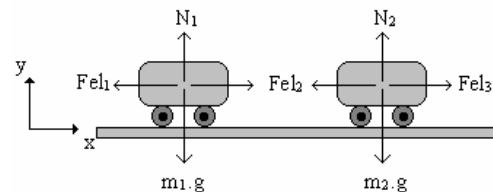


Figura 1 – Diagrama de cuerpo libre del sistema

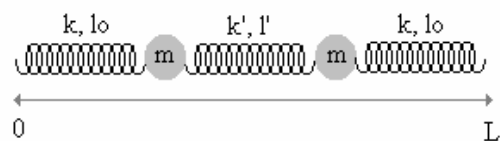


Figura 2 – Características del sistema

Dado que el experimento nos permite medir la fuerza elástica en función del tiempo, el primer paso del análisis teórico consistió en el planteo de las ecuaciones de Newton (ver figura 2).

$$-k \cdot (x_1 - l_0) + k' \cdot (x_2 - x_1 - l') = m_1 \cdot x_1'' \quad (1)$$

$$-k' \cdot (x_2 - x_1 - l') + k \cdot (L - x_2 - l_0) = m_2 \cdot x_2'' \quad (2)$$

Para poder resolver este sistema de ecuaciones diferenciales acopladas fue necesario el uso de herramientas matemáticas como la transformada de Fourier, la cual permite transformar una ecuación lineal integro-diferencial de orden n en una ecuación polinómica de grado n. Esta se define como:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

De esta manera se logra obtener una función cuya variable independiente es la frecuencia (ω). Para aplicar la transformada se agrupa sólo el sistema homogéneo.

De (1) y de (2) se obtiene:

$$-\frac{(k+k')}{m_1} \cdot x_1 + \frac{k'}{m_1} \cdot x_2 = x_1'' \quad (4)$$

$$-\frac{(k+k')}{m_2} \cdot x_2 + \frac{k'}{m_2} \cdot x_1 = x_2'' \quad (5)$$

Y aplicando la transformada obtenemos:

$$-\frac{(k+k')}{m_1} \cdot \hat{x}_1 + \frac{k'}{m_1} \cdot \hat{x}_2 = -\omega^2 \hat{x}_1 \quad (6)$$

$$-\frac{(k+k')}{m_2} \cdot \hat{x}_2 + \frac{k'}{m_2} \cdot \hat{x}_1 = -\omega^2 \cdot \hat{x}_2 \quad (7)$$

Buscando que el sistema de ecuaciones sea dependiente, es decir que su determinante sea 0, se puede despejar ω :

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot (k+k') \cdot \left(\frac{m_1+m_2}{m_1 \cdot m_2} \right) \pm \sqrt{(k+k')^2 \left(\frac{m_1+m_2}{m_1 \cdot m_2} \right)^2 - 4 \left(\frac{(k+k')^2 - k'^2}{m_1 \cdot m_2} \right)} \quad (8)$$

• Para el caso en que las masas son iguales se obtienen las siguientes frecuencias:

$$\omega^2 = \frac{k+2 \cdot k'}{m} \quad (9)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad (10)$$

Para el plano inclinado se agrega un término constante correspondiente a la fuerza peso pero, como se trabaja sólo con el sistema homogéneo, se obtienen las mismas frecuencias.

• Para diferentes masas las frecuencias son:

$$\omega^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{(k+k')}{m} + \frac{1}{3m} \sqrt{k^2 + 2k \cdot k' + 4k'^2} \quad (11)$$

$$\omega^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{(k+k')}{m} - \frac{1}{3m} \sqrt{k^2 + 2k \cdot k' + 4k'^2} \quad (12)$$

Hay que aclarar que, como el número de datos obtenidos experimentalmente es finito, no se puede utilizar la transformada de Fourier como se la citó anteriormente. Sin embargo, se puede utilizar una variante de esta a la que se denomina Transformada Rápida de Fourier. Ésta no es más que un algoritmo que permite aproximar numéricamente la transformada de Fourier de una función.

No obstante, este análisis pone algunas limitaciones en la señal. Por ejemplo: la señal de la que se tomaron muestras y que se va a transformar debe consistir de un número de muestras igual a una potencia de dos. El rango de frecuencias cubierto por el análisis TRF depende de la cantidad de muestras recogidas y de la proporción de muestreo.

Por otro lado, se tuvo en cuenta el Teorema de Muestreo por el cual el intervalo de muestreo debe ser el doble de la mayor frecuencia que presente la onda.

Finalmente, una vez aplicada la TRF se selecciona el intervalo de datos cercano a las frecuencias esperadas y se aplica la curva de distribución Lorentziana para obtener la frecuencia más aproximada al valor real. La ecuación de esta curva es:

$$y = y_0 + \frac{2 \cdot A}{\pi} \cdot \frac{w}{4(x - x_0)^2 + w^2} \quad (13)$$

Donde:

y_0 = Altura de la base de la curva

A = Área total debajo de la curva medida desde y_0

x_0 = Posición del valor máximo

w = Ancho total de la curva a la mitad de su altura

De este gráfico se puede interpretar al máximo de la función como la frecuencia buscada, y al semi-ancho de la curva como el error correspondiente.

Arreglo experimental

En este apartado se realizará una descripción en profundidad del experimento seleccionado para este trabajo.

Como paso principal para este estudio resulta imprescindible definir el sistema al cual nos vamos a referir. El mismo está compuesto por dos móviles vinculados entre ellos mediante un resorte y a su vez, estos móviles están vinculados con dos puntos fijos mediante dos resortes a los que supondremos iguales. Para facilitar la comprensión del montaje se puede observar la figura 3 donde se muestra una vista lateral de éste.

Previamente a la disposición de los materiales se analizó las posibles limitaciones de los elementos de

medición. De esta manera se supeditó la posición de los objetos requeridos para realizar esta experiencia de forma tal que el movimiento del sistema se realice dentro de parámetros esperables.

Una vez seleccionado el sistema a estudiar se procedió al montaje del experimento de la siguiente manera:

Inicialmente se colocó el plano de forma horizontal utilizando el nivel para evitar que la normal de los móviles con el plano afectara el movimiento de los móviles. Asimismo se limpió el plano para reducir al mínimo posible el rozamiento entre éste y los móviles.

Una vez hecho esto se calibraron los dos medidores de tensión y fueron colocados sobre la dirección del plano horizontal de forma tal que el sistema esté en equilibrio cuando todos los resortes estén elongados. Se tuvo especial cuidado de que el medidor registre la totalidad de la fuerza que sentiría una vez vinculados los resortes. Para calibrar los dos sensores se suspendieron diversas masas indicando los valores reales al programa logrando un ajuste lineal. El programa utilizado para la obtención de los datos fue el Multi Purpose Lab Interface (MPLI)

Los medidores de tensión fueron ajustados a soportes rígidos de forma que al conectar los osciladores de los extremos los medidores de tensión funcionen como los puntos fijos requeridos en nuestras hipótesis, mientras que a su vez registran la fuerza elástica en el extremo del resorte.

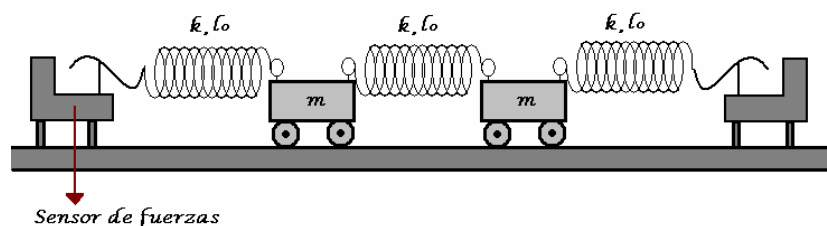


Figura 3 – Montaje del experimento utilizado para analizar el movimiento de un oscilador acoplado.

Por otro lado los resortes fueron examinados mediante mediciones estáticas para obtener sus constantes elásticas, las cuales para cumplir con nuestras hipótesis deben ser iguales o muy similares. Dichas mediciones consistieron en suspender del resorte diferentes masas y medir la elongación del mismo (Ver figura 4). Con estos datos se obtiene el gráfico de una recta cuya pendiente es g/k y se despeja la constante elástica.

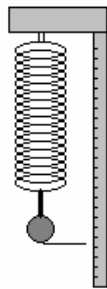


Figura 4 – Montaje para obtener el valor de la constante elástica mediante el método estático.

Ya dispuestos los elementos ajenos al sistema se colocaron los dos móviles iguales sobre el plano. Luego mediante los 3 resortes se vincularon los carritos entre ellos y con los dos sensores de fuerzas. Posteriormente se fijaron los resortes para asegurar que el extremo de éstos tuviera siempre la misma velocidad que el elemento del cual está sujeto.

Una vez preparados los elementos del experimento se comenzaron las mediciones con las que se analizaron los posibles movimientos del sistema. Para esto se ejecutaron diversos corrimientos de su equilibrio al sistema de forma que oscile distintos modos.

Como por medio de nuestros cálculos preeliminares esperábamos que cualquier movimiento del sistema sea una combinación de dos tipos de oscilaciones posibles, se buscó identificar independientemente a cada una de éstas.

Una vez finalizado el análisis sobre el comportamiento de este oscilador

acoplado, se decidió modificar las condiciones con las cuales este experimento se desarrolló. Para esto se introdujeron dos variaciones. La primera fue una alteración de las masas de los móviles, de forma que uno tuviera el triple de la masa inicial. La segunda fue la inclinación del plano, llevándolo a que forme un ángulo con la horizontal (Ver figura 5).

En último lugar se identificaron las dos frecuencias propias de estos dos experimentos mostrando una vez más que cualquier movimiento es una composición de dos oscilaciones propias.

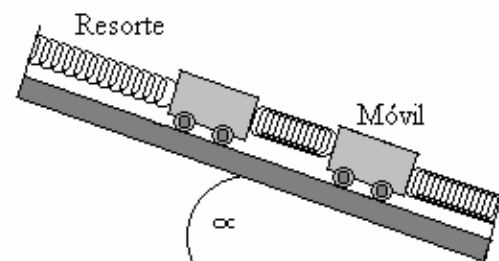


Figura 5 – Montaje del experimento para oscilaciones sobre plano inclinado

Resultados y discusión

Los experimentos fueron realizados con las características de la tabla 1.

Para cada caso el movimiento fue originado por un desplazamiento de los móviles de su posición de equilibrio.

Mediante el método estático se obtuvieron los valores de las constantes elásticas:

$$K_1 = 28,96 \pm 0.36 \text{ Kg/seg}^2$$

$$K_2 = 29,95 \pm 0.33 \text{ Kg/seg}^2$$

$$K_3 = 27.97 \pm 0.40 \text{ Kg/seg}^2$$

Dada la similitud entre las constantes 1 y 3, para facilitar los cálculos se los supuso iguales y se utilizó un promedio de ambos.

$$K = 28.46 \pm 0.38 \text{ Kg/seg}^2$$

<i>Condiciones para cada experimento</i>						
	Modo de oscilación	Masa 1 [kg]	$\Delta M1$ [kg]	Masa 2 [kg]	$\Delta M2$ [kg]	Vel inicial [m/s]
Experimento 1	Paralelo	0.51203	0.00001	0.51203	0.00001	0
	Opuesto	0.51203	0.00001	0.51203	0.00001	0
	Combinado	0.51203	0.00001	0.51203	0.00001	0
Experimento 2	Paralelo	1.53609	0.00001	0.51203	0.00001	0
	Combinado 1	1.53609	0.00001	0.51203	0.00001	0
	Combinado 2	1.53609	0.00001	0.51203	0.00001	0
Experimento 3	Paralelo	0.51203	0.00001	0.51203	0.00001	0
	Opuesto	0.51203	0.00001	0.51203	0.00001	0
	Combinado	0.51203	0.00001	0.51203	0.00001	0

Tabla 1 – Condiciones iniciales para cada experimento

Experimento 1

- *Modo paralelo*

A partir de los datos medidos de fuerza en función del tiempo, se obtiene el gráfico de la figura 6.

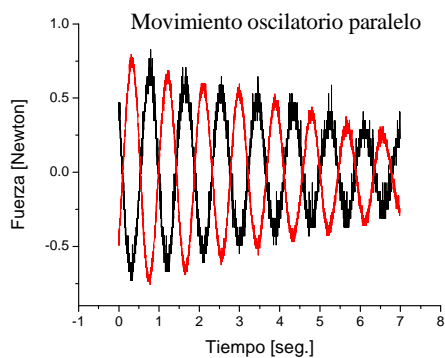


Figura 6 – Datos obtenidos de la fuerza en función del tiempo sin filtros de frecuencia aplicados.

Por la existencia de frecuencias no propias del modo de oscilación se aplica un filtro (filtro FFT) que permite trabajar con el rango de frecuencias que se desea analizar.

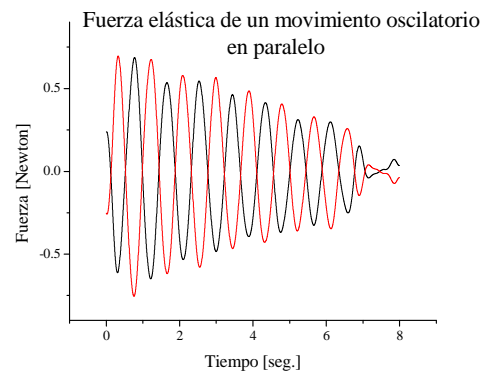


Figura 7 – Fuerza elástica en función del tiempo con filtro aplicado

Para obtener la frecuencia propia del modo de oscilación se utiliza la ecuación 9 mencionada en la introducción, obteniendo el siguiente valor:

$$\omega = 7,45 \pm 0.05 \text{ 1/seg}$$

Dado que la frecuencia que brinda el análisis mediante la transformada de Fourier resulta ser el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo, al valor de la frecuencia angular obtenido analíticamente es necesario

dividirlo por 2π . De esta forma, el valor obtenido es el siguiente:

$$\omega = 1,185 \pm 0.008 \text{ 1/seg}$$

A los datos obtenidos experimentalmente se aplicó la FFT, la cual nos devuelve un número finito de valores correspondientes a las frecuencias contenidas en el movimiento. Dado que dichos valores no forman una curva continua se puede ajustar una curva de distribución Lorentziana la cual nos permitirá obtener el valor más aproximado a la frecuencia buscada. Se obtiene el gráfico de la figura 8.

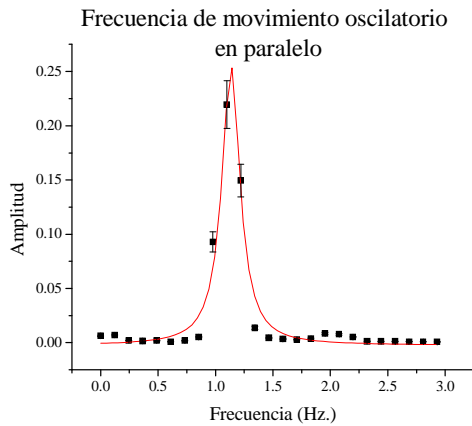


Figura 8 – Gráfico de la frecuencia para el modo paralelo de movimiento

El valor obtenido para la frecuencia a partir del gráfico anterior es:

$$\omega = 1,13 \pm 0.09 \text{ 1/seg}$$

Donde el error se obtiene del semiancho de la curva.

- *Modo opuesto*

Se procede de modo similar al caso anterior y se obtienen los gráficos de las figuras 9 y 10.

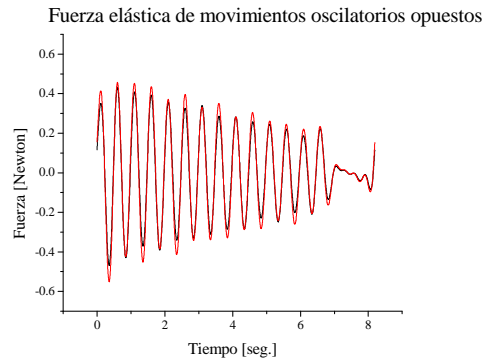


Figura 9 – Gráfico de la fuerza elástica en función del tiempo para un movimiento oscilatorio acoplado en el que los móviles tienen igual masa.

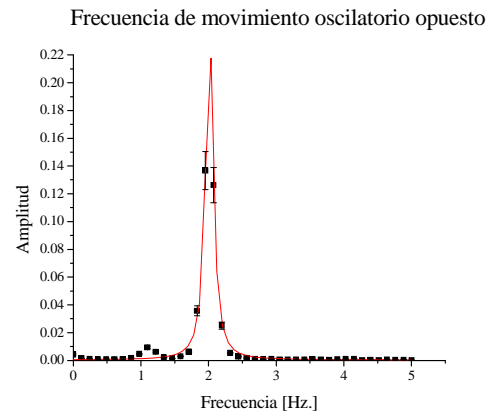


Figura 10 – Frecuencia para movimiento oscilatorio opuesto con ajuste Lorentziano

El valor obtenido analíticamente de la ecuación 10 dividido por 2π es:

$$\omega = 2,09 \pm 0.02 \text{ 1/seg}$$

El valor obtenido a partir de la figura 10 es:

$$\omega = 2,010 \pm 0.006 \text{ 1/seg}$$

- *Modo combinado*

Se procede de modo análogo al caso anterior y se obtienen los gráficos de las figuras 11 y 12

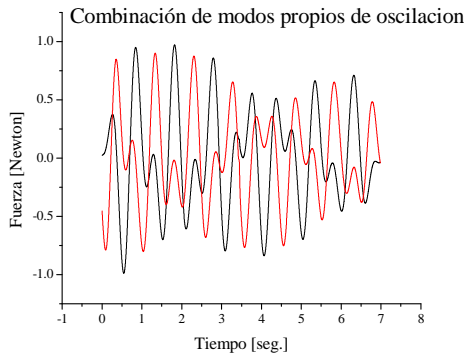


Figura 11 - Gráfico de la fuerza elástica en función del tiempo para un movimiento oscilatorio en el que se combinan los dos modos propios de oscilación.

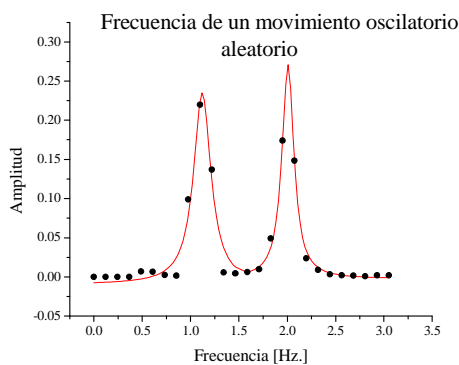


Figura 12 - Frecuencia para movimiento oscilatorio combinado con ajuste Lorentziano

Los valores para la frecuencia obtenidos analíticamente son los mismos que para los dos modos anteriores, lo cual nos muestra que este movimiento es simplemente una combinación de los modos propios. Los resultados derivados del gráfico son:

$$\omega = 2,010 \pm 0.007 \text{ 1/seg}$$

$$\omega = 1,12 \pm 0.10 \text{ 1/seg}$$

Experimento 2

En este caso se hará oscilar el sistema de la misma forma que en el experimento anterior pero variando las masas de los móviles. Por esta razón, se dificulta lograr los modos propios de oscilación, por lo cual estudiaremos únicamente el modo paralelo y dos modos combinados.

- *Modo paralelo*

Se procede de modo análogo al caso anterior y se obtienen los gráficos de las figuras 13 y 14

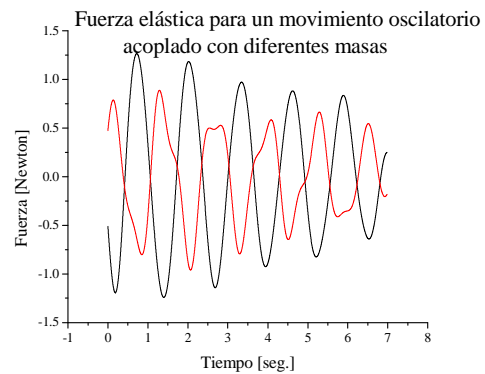


Figura 13 - Gráfico de la fuerza elástica en función del tiempo para un movimiento oscilatorio paralelo con diferentes masas.

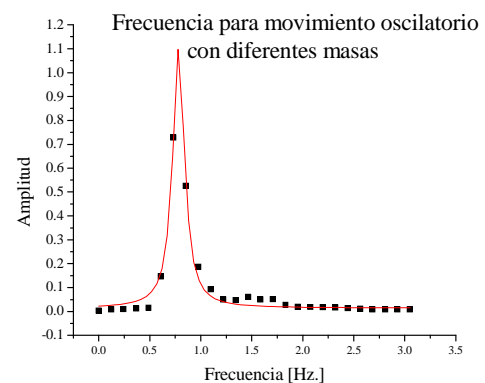


Figura 14 - Frecuencia para movimiento oscilatorio paralelo para diferentes masas con ajuste Lorentziano

El valor obtenido analíticamente a partir de la ecuación 12 son:

$$\omega = 0.790 \pm 0.033 \text{ 1/seg}$$

El valor obtenido a partir de la figura 14 fue:

$$\omega = 0.78 \pm 0.07 \text{ 1/seg}$$

- *Modo combinado I*

Se procede de igual modo a los casos anteriores y se obtienen los gráficos de las figuras 15 y 16

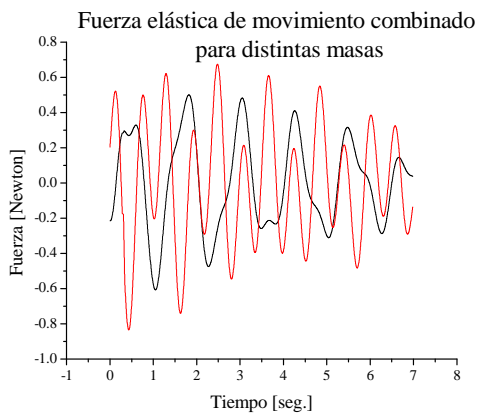


Figura 15 - Gráfico de la fuerza elástica en función del tiempo para un movimiento oscilatorio aleatorio con diferentes masas.

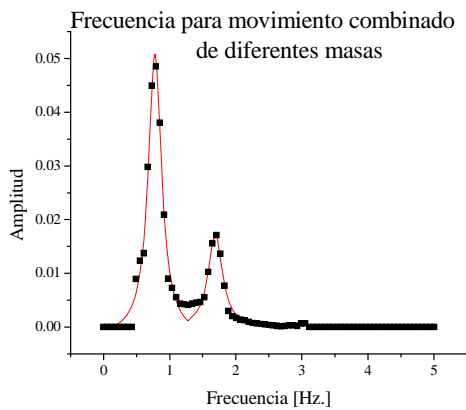


Figura 16 - Frecuencia para movimiento oscilatorio combinado para diferentes masas con ajuste Lorentziano

Los valores obtenidos analíticamente a partir de las ecuaciones 11 y 12 son:

$$\omega = 1.790 \pm 0.067 \text{ 1/seg}$$

$$\omega = 0.790 \pm 0.033 \text{ 1/seg}$$

Los valores obtenidos a partir del gráfico de la figura 16 son:

$$\omega = 1.69 \pm 0.13 \text{ 1/seg}$$

$$\omega = 0.78 \pm 0.12 \text{ 1/seg}$$

- *Modo Combinado II*

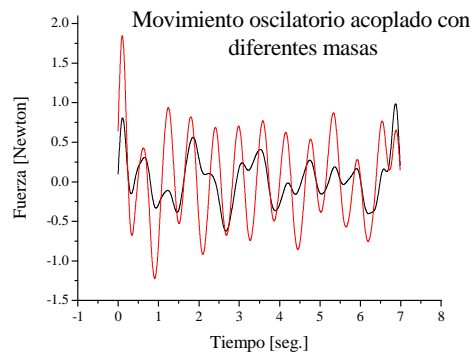


Figura 17 - Fuerza elástica en función del tiempo para un movimiento oscilatorio combinado con diferentes masas.

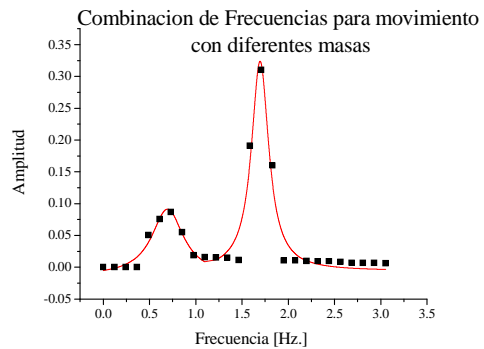


Figura 18 - Frecuencia para movimiento oscilatorio combinado para diferentes masas con ajuste Lorentziano

Los valores obtenidos analíticamente a partir de las ecuaciones 11 y 12 son:

$$\omega = 1.790 \pm 0.067 \text{ 1/seg}$$

$$\omega = 0.790 \pm 0.033 \text{ 1/seg}$$

Los valores obtenidos a partir del gráfico de la figura 18 son:

$$\omega = 1.69 \pm 0.11 \text{ 1/seg}$$

$$\omega = 0.7 \pm 0.2 \text{ 1/seg}$$

Experimento 3

En este experimento se buscarán las frecuencias para el movimiento oscilatorio acoplado montado en un plano inclinado. En este caso las masas de los móviles serán iguales.

- *Modo Paralelo*

Se procede de modo análogo al caso anterior y se obtienen los gráficos de las figuras 19 y 20

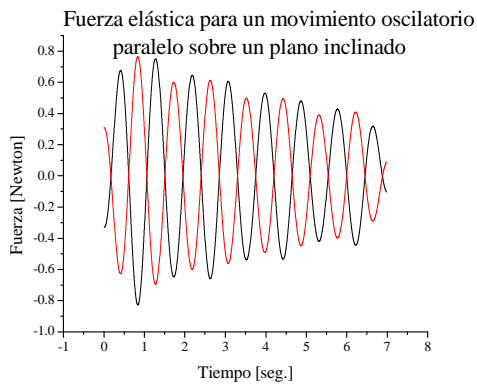


Figura 19- Fuerza elástica en función del tiempo para un movimiento oscilatorio paralelo sobre un plano inclinado.

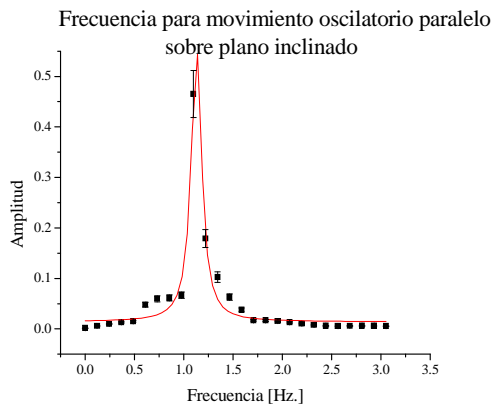


Figura 20 - Frecuencia para movimiento oscilatorio paralelo sobre un plano inclinado con ajuste Lorentziano

Los valores obtenidos analíticamente:

$$\omega = 1.180 \pm 0.008 \text{ 1/seg}$$

Los valores obtenidos a partir del gráfico de la figura 20 son:

$$\omega = 1.13 \pm 0.06 \text{ 1/seg}$$

- *Modo opuesto*

Se procede de modo análogo al caso anterior y se obtienen los gráficos de las figuras 21 y 22

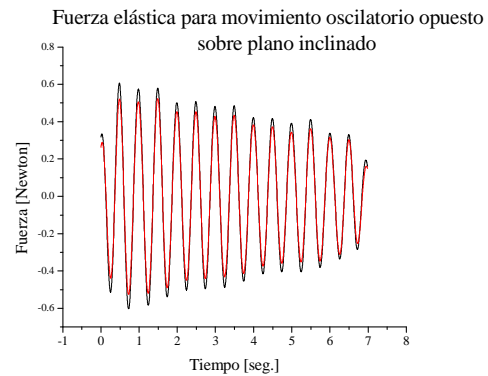


Figura 21- Fuerza elástica en función del tiempo para un movimiento oscilatorio opuesto sobre un plano inclinado.

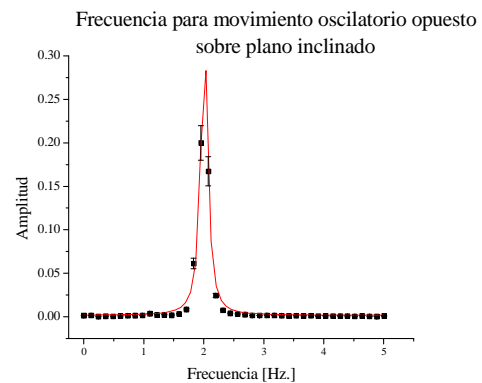


Figura 22 - Frecuencia para movimiento oscilatorio opuesto sobre un plano inclinado con ajuste Lorentziano

Los valores obtenidos analíticamente:

$$\omega = 2.09 \pm 0.02 \text{ 1/seg}$$

Los valores obtenidos a partir de la figura 22 son:

$$\omega = 2.01 \pm 0.13 \text{ 1/seg}$$

- *Modo combinado*

Se procede de modo análogo al caso anterior y se obtienen los gráficos de las figuras 23 y 24.

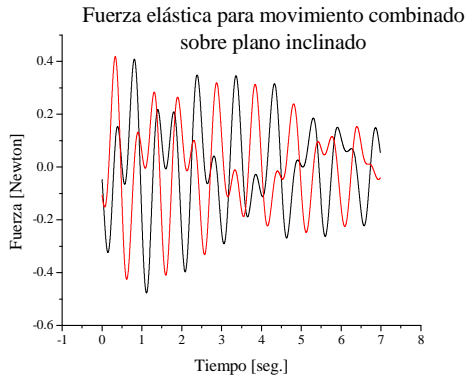


Figura 23- Fuerza elástica en función del tiempo para un movimiento oscilatorio combinado sobre un plano inclinado.

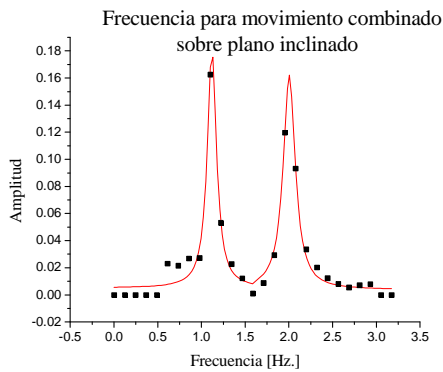


Figura 24 - Frecuencia para movimiento oscilatorio combinado sobre un plano inclinado con ajuste Lorentziano

Los valores obtenidos analíticamente:

$$\omega = 1.180 \pm 0.008 \text{ 1/seg}$$

$$\omega = 2.09 \pm 0.02 \text{ 1/seg}$$

Los valores obtenidos a partir del gráfico de la figura 24 son:

$$\omega = 1.12 \pm 0.08 \text{ 1/seg}$$

$$\omega = 2.00 \pm 0.06 \text{ 1/seg}$$

En los resultados obtenidos se puede ver que para cada movimiento propio, ya sea sobre una superficie horizontal o un plano inclinado se puede encontrar las mismas frecuencias. Esto muestra que la frecuencia no depende de ninguna fuerza constante. Sin embargo, si analizamos el caso en que hay variación de masas se puede ver que si bien se mantienen dos frecuencias propias, su valor difiere de los otros experimentos. Por otro lado, se puede ver que para los 3 experimentos cualquier movimiento oscilatorio del sistema se puede describir como una combinación de los modos propios (frecuencias) ya mencionados.

Conclusión

Al observar los datos obtenidos a lo largo de los experimentos se pudo observar efectivamente la existencia de modos propios de oscilación, cada uno de estos con una frecuencia característica. Estas pueden ser visualizadas claramente en las gráficas de las funciones obtenidas gracias a la transformación de Fourier. Dicha herramienta nos permite distinguir una única frecuencia para cada modo propio, mientras que es posible observar que en los otros tipos de oscilación se encuentran presentes únicamente composiciones de estas dos frecuencias. Este hecho nos permite deducir que los modos de oscilación aleatorios son combinaciones de los modos propios. Al realizar el mismo análisis para los otros dos casos estudiados, es decir las distintas combinaciones de masas y la oscilación en el plano inclinado, pudimos corroborar el mismo fenómeno, distinguiendo únicamente una variación en la magnitud de la frecuencia para el caso de diferentes masas.

Los resultados que nos permiten verificar lo dicho anteriormente son:

Modo paralelo

Resultado analítico

$$\omega = 1,185 \pm 0.008 \text{ 1/seg}$$

Resultado Experimental

$$\omega = 1,13 \pm 0.09 \text{ 1/seg}$$

Modo opuesto

Resultado analítico

$$\omega = 2,09 \pm 0.02 \text{ 1/seg}$$

Resultado Experimental

$$\omega = 2,010 \pm 0.006 \text{ 1/seg}$$

Modo combinado

Resultado Experimental

$$\omega = 2,010 \pm 0.007 \text{ 1/seg}$$

Resultado Experimental

$$\omega = 1,12 \pm 0.10 \text{ 1/seg}$$

Cabe aclarar que en este apartado se presentan únicamente estos resultados porque generalizan las conclusiones.

Bibliografía

- Roederer, J.G.: “Mecánica elemental”, Ed. Eudeba , Buenos Aires, 2002.
- Martinez O.: “Ondas: es Física”, - Libro en edición -Buenos Aires, 2005.
- Goldstein H. : “Mecánica Clásica”, Addison-Wessley publishing co. inc., madrid, 1969.