Mapas Iterativos y Caos

Joaquín González Álvarez.

El tratamiento de los sistemas dinámicos que varían continuamente con el tiempo, suele efectuarse a base de ecuaciones como:

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$
$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

sin embargo los sistemas dinámicos de variación discreta es posible resolverlos mediante mapas iterativos del tipo:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

los cuales se procesan como su nombre sugiere, comenzando con sustituir el valor de la variable en el segundo miembro (variable independiente) y el resultado de la operación tomarlo como nuevo valor de la variable independiente e ir reiterando el proceso el número de veces que sea necesario

Un primer ejemplo de utilización de mapas iterativos, lo haremos con uno mediante el cual puede calcularse la raíz cuadrada de 2 con el número de cifras decimales que deseemos. El mapa en cuestión tiene la siguiente forma:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$$

Antes de comenzar el proceso, vamos a justificar el uso de dicho mapa para calcular $\sqrt{2}$.

Comenzamos por plantear una ecuación que tiene la misma forma que la del mapa pero sin subíndices:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

la cual mediante pasos muy sencillos podemos transformar en la igualdad: $x = \sqrt{2}$.

que nos justifica que la iteración del mapa antes presentado nos dará la raíz cuadrada de 2 con el número de cifras decimales que queramos.

Comencemos la iteración dando a la variable en el segundo miembro (variable independiente) el valor 1. El resultado es *1.5.* Como antes indicamos, ese será el nuevo valor de la variable independiente y ahora el resultado será 1.4166....,. Se continuará la iteración y ya en la número 11 se tendrá el valor 1*.4142*....que es la aproximación que suele tomarse por lo general como valor de $\sqrt{2}$.

No obstante, el ejemplo que acabamos de ver no es del tipo mas utilizado como lo son los que se aplican al tratamiento de sistemas dinámicos de la física, la química, la biología, las ciencias sociales, la economía y otras especialidades.

Ejemplo paradigmático de mapa iterativo aplicado a sistemas dinámicos lo es sin dudas el mapa logístico, no sólo por su importancia práctica sino y sobre todo, por sus excepcionales y sorprendentes propiedades.

El mapa logístico tiene la siguiente expresión:

$$x_{n+1} = k.x_n(1 - x_n)$$

y se aplica principalmente a problemas de crecimiento poblacional de especies animales o de semejante índole.

Por x_{n+1} (variable dependiente) se representa la población en la etapa o generación n+1 de la especie que se trate, con x_n (variable independiente) se simboliza la población en la etapa n y con k la tasa de crecimiento que dependerá de las condiciones ambientales, climáticas, alimentarias, etc.

Veamos un ejemplo: Sea el caso en el cual se quiere investigar la población en millares de ejemplares, en las etapas que van a seguir (variable dependiente) conociendo la población en cada etapa anterior (variable independiente) y la tasa de crecimiento. Tomemos como valor inicial de la variable independiente 0.8 (quiere decir 0.8 millares de ejemplares), con una tasa de crecimiento de 2. Comenzamos la iteración en el mapa logístico. La primera da 0.32, la segunda 0.435, la tercera 0.5 y al tratar de seguir la iteración nos encontramos que continuará dando 0.5. Vemos aquí una de los sorprendentes hallazgos que se presentan en el mapa logístico y otros similares: la llegada a un valor estacionario, fijo, o atractor, como suele llamársele, el cual se caracteriza por ser igual para la variable independiente y para la variable dependiente, significando en la práctica que la población se mantiene invariable.

Si se va aumentando el valor de k se llega a uno en el cual los atractores serán dos, y así se va llegando a valores de k en los cuales comienza a duplicarse el número de atractores o ciclo de atractores. Por ejemplo al llegar k a 3,5 el ciclo será de cuatro atractores porque el anterior (que no hemos efectuado aquí) fue el de dos.

La separación o distancia entre los puntos (valores de k), de duplicación del ciclo se va haciendo cada vez menor, pero la relación entre la distancia de separación entre dos ciclos consecutivos y la distancia análoga anterior, se mantiene constante. Esta es otra de las interesantes propiedades que presentan mapas iterativos como el logístico y que fue descubierta por Mitchell Feigenbaum por lo que en su honor dicha constante se denomina Constante de Feigenbaum.

El descubrimiento de Feigenbaum constituyó un hecho trascendental en la historia de las matemáticas y la constante que lleva su nombre alcanza una importancia similar a la de otras como π.

Singular importancia presenta el gráfico que resulta de tomar en el eje de abscisas los valores de k en cada punto de bifurcación y en el de ordenadas los valores de los atractores. De esta manera a la abscisa k=2, le corresponderá, como vimos, la ordenada 0.5. A partir del punto (2,0.5) se traza una línea paralela al eje de abscisas hasta llegar al punto de comienzo del ciclo de dos atractores. A cada uno de estos dos atractores se le hace corresponder una línea paralela al eje de abscisas que llegarán hasta el punto de la siguiente bifurcación. Se habrá conformado hasta ahí en el gráfico, la figura de una horquilla o Y paralela al eje de abscisas. Al llegar al valor de k de la siguiente duplicación, cada rama de la horquilla se bifurcará, y así sucesivamente se irán formando horquillas cada vez mas pequeñas y por el hallazgo de Feigenbaum, mas cercanas entre si.

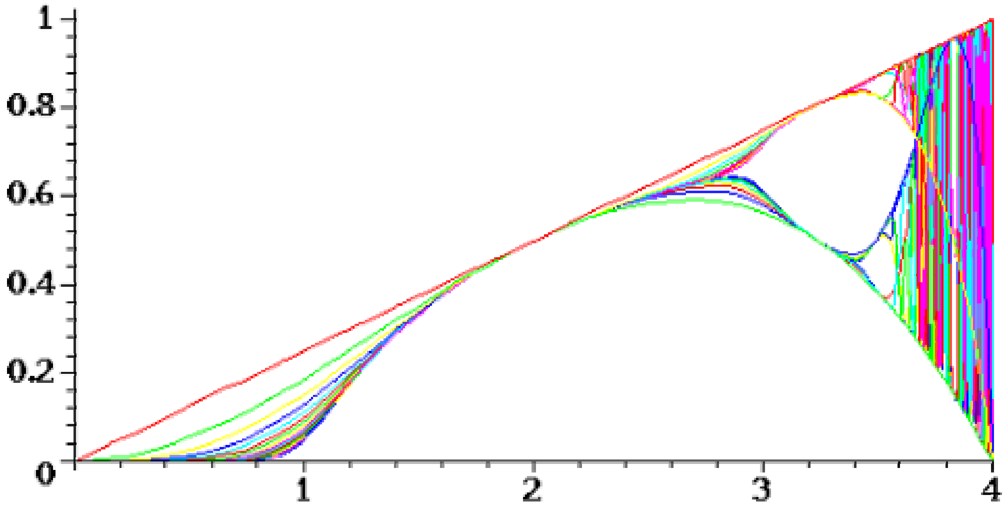

Diagrama de Feigenbaum

Al fijarnos en ese gráfico llamado Diagrama de Feigenbaum, nos damos cuenta de una mas de las sorprendentes propiedades de los mapas iterativos: la condición de fractal del gráfico y por ende del proceso de evolución iterativa de los procesos que los mapas representan. Es por esto último que tan relacionadas están las Teorías de los Fractales y del Caos del cual pasamos a tratar a continuación,

En efecto, al llegar k a un valor muy cercano a 4, ya no se presentan repeticiones, ciclos de atractores, el proceso ha perdido periodicidad y aparece también el hecho de que muy pequeñas variaciones del valor inicial de la variable independiente, genera notables variaciones de los valores que se obtienen. Esta situación de no periodicidad y gran sensibilidad a las variaciones de las condiciones iniciales constituye lo que ha dado en llamarse *caos*.

La fractalidad es decir, la aparición de orden en el aparente absoluto desorden del caos, no sólo se presenta en la *ruta hacia el caos* antes vista, sino también *a las puertas del caos* (muy próximo a k=4) y ya en plena situación de caos. En las cercanías del comienzo del caos, si los valores de los atractores se situaran como puntos en un eje de abscisas (o de ordenadas), quedarían dispuestos de tal forma que remedarían el fractal llamado Conjunto de Cantor el cual se construye a partir de un segmento de recta que se divide en tres partes iguales, se suprime la del centro y se sigue iterando este proceso en cada uno de los segmentos que van apareciendo hasta que éstos semejan puntos. De nuevo en pleno caos aparecerá el fractal de Cantor en una configuración llamada *atractor extraño* que surge de la representación gráfica de las soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales que aparecen en el primer párrafo de este trabajo, aplicadas a la situación de caos.

La aparición y desarrollo de la Teoría del Caos a mediados del pasado siglo XX, se debe a los trabajos del climatólogo Edward Lorenz.

El comienzo de las investigaciones de Lorenz, fueron motivadas al notar que las predicciones del tiempo a partir de ciertos datos con determinado número de cifras decimales, diferían notablemente de las que se hacían tomando un número ligeramente mayor de éstas.

Feigenbaum

Lorentz

Se ha popularizado sobre el caos, una metáfora, en nuestra opinión no muy adecuada, en la cual se expresa que "el leve aleteo de una mariposa en San Francisco puede ser capaz de provocar un huracán en Beijing" (o algo por el estilo), la cual ha motivado que al caos suela llamársele "Efecto Mariposa". El caso es que la Teoría del Caos ha pasado a constituir uno de los paradigmas de la ciencia de nuestros días.

Bibliografía

Peiten-Jurgens. Chaos and Fractals.
Strogatz. Nonlinear Dynamics and Chaos.
Zill.Differential Equations.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com