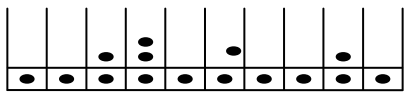
EL CÁLCULO DE LA PROBABILIDAD DE LA SUMA EN LA TIRADA DE DADOS

RODOLFO CARABIO

PROBABILIDAD DE LA SUMA [S] AL ARROJAR [N] DADOS

Se tienen **N** dados, y queremos saber cual es la probabilidad que al arrojarlos la suma de las caras hacia arriba sea un numero **S**. También se puede investigar la suma más probable y la probabilidad de que la suma sea superior a **S**

De acuerdo a la figura que sigue, podemos representar la suma **S** como la cantidad total de círculos que hay dentro de la caja, cada columna vertical representa los puntos con los que salen cado uno de los dados



Esto nos da la posibilidad de calcular el número de formas posibles $W_N(S)$, en la cual la suma S puede presentarse al arrojar los N dados, solo si:

$$S \leq N + 5 \quad (1)$$

La razón de esta limitación del método esta en que los dados no pueden salir con un puntaje mayor a 6, en la figura se puede deducir que esto pasaría si pretendemos extender el método mas allá de la condición (1), lo cual es incorrecto.

Sin embargo para valores de la suma dentro de la condición anotada, el método debe ser efectivo, procediendo para estos casos, se tiene:

El número $W_N(S)$ es el número de formas en la cual $(S-N)$ círculos pueden alojarse en N columnas, es el equivalente al número de formas en la que $(S-N)$ objetos se pueden disponer en N cajas.

De acuerdo al grafico que sigue, los $(S-N)$ elementos (cuadrados) tienen $(S-N)$¡ combinaciones impertinentes asociadas a ellos, en tanto que los $(N-1)$ elementos de división tienen $(N-1)$¡ permutaciones impertinentes asociadas

/ ■ / / ■■ / /■ / / / ■ / ■ / ■

El numero total de permutaciones de los elementos totales (cuadrados y elementos de división)

$$[(S-N)+(N-1)]! = (S-1)!$$

Es el producto de las $W_N(S)$ formas distintas de ordenar los cuadrados en las N cajas (columnas), multiplicado por las combinaciones impertinentes que cada forma tiene asociada, son las permutaciones totales, entonces se puede escribir:

$$(S-1)! = W_N(S).(N-1)!.(S-N)!$$

$$W_N(S) = \frac{(S-1)!}{(N-1)!.(S-N)!}$$

El número de formas M en la cual N dados pueden salir son 6^N, entonces como la probabilidad de salida de una suma S es $P(S) = W_N(S)/M$

$$W_N(S) = \frac{(S-1)!}{(N-1)!.(S-N)!.6^N}$$

$$S \leq N+5$$

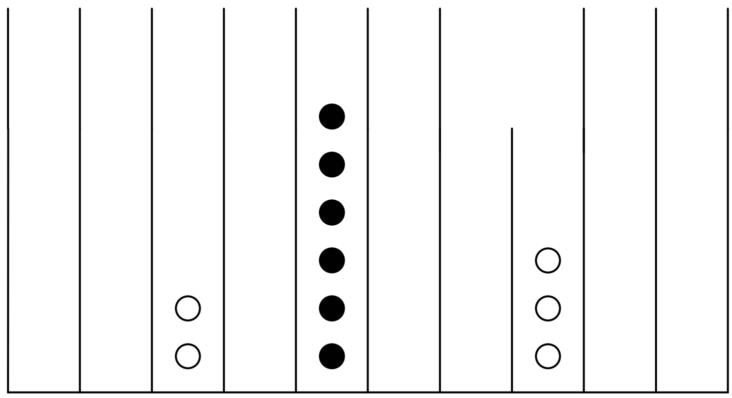
El método expuesto puede aplicarse por simetría al caso en los cuales la suma

$$S \geq 6N-5$$

Sin embargo tal método cubre solo una parte de las posibilidades, para el calculo de las probabilidades en todo el rango posible de la suma S, desde N hasta $6N$,es necesario descontar las disposiciones impertinentes Wi que la formula hallada calcula para $S > N+5$

Estas disposiciones que no ocurren en la tirada de dados, pues no hay dados que puedan salir con puntaje mayor a seis, se pueden calcular contando las disposiciones en la cual se agrupan siete o mas círculos en por lo menos una columna. O bien de manera mas sencilla representamos el numero de formas en la cual pueden caer seis o mas círculos en una columna, significando en este caso el puntaje sobre el nivel mínimo de unos que obligatoriamente salen en la tirada de dados

En la figura que sigue se representa una disposición impertinente de círculos sobre el nivel mínimo de ases, círculos negros y blancos representan el mismo puntaje, pero se ordenaran de forma distinta a fin de calcular las disposiciones impertinentes



En la figura se representa la tirada de N=10 dados, los círculos indican los puntos sobre el nivel de unos por tanto es un caso en que la suma $S = 21$

El número de disposiciones impertinentes lo podemos calcular del siguiente modo:

Manteniendo en una misma posición la columna de seis círculos, los restantes cinco círculos se pueden disponer de m formas diferentes

$$m = \frac{(S-7)¡}{(N-1)¡.(S-N-6)¡}$$

Ahora bien: si cambiamos la posición de la columna de seis círculos negros un lugar obtendremos otras m disposiciones distintas a las anteriores, repitiendo el proceso, la columna de seis círculos se puede disponer en los N lugares (columnas), lo cual significa que el numero de disposiciones distintas impertinentes Wi es:

$$Wi = N.m$$

$$Wi = \frac{N.(S-7)¡}{(N-1)¡.(S-7)¡}$$

Aquí es importante señalar que los círculos vacíos no pueden agruparse en 6 o mas por columna, pues de hacerlo, el proceso de multiplicar por N contaría mas disposiciones impertinentes de las que realmente pueden existir, ya que se superpondrían columnas de seis círculos negros.

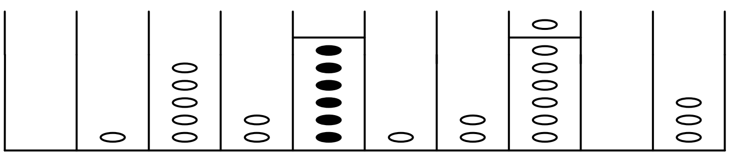
De forma que podemos calcular el número de combinaciones pertinentes de N dados que dan la suma S : $W_N(S)$ en la siguiente formula:

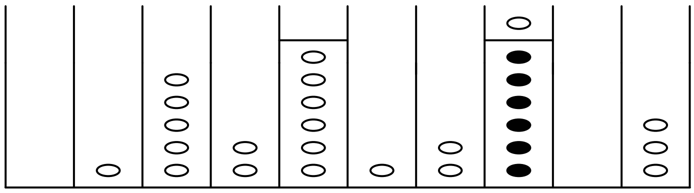
$$W_N(S) = \frac{(S-1)¡}{(N-1)¡.(S-N)¡} - \frac{N(S-7)¡}{(N-1)¡.(S-N-6)¡}$$

Válida para: $S \leq N+11$

No se puede extender la aplicación de esta formula mas allá del valor $S = N+11$,porque en ese caso se estarían contando disposiciones repetidas.

Eso se puede ver en la comparación de los siguientes gráficos:





Puede verse que en los dos gráficos anteriores se representa la misma disposición de círculos por columnas, la traslación de la columna de círculos llenos en ese caso no cambio la disposición, por tal razón, multiplicar por N para obtener el numero total de disposiciones impertinentes contaría mas de las que realmente son Para extender la aplicación del esquema utilizado valido hasta $S = N + 11$,hay que seguir estudiando el tema:

Para extender la aplicación del esquema utilizado valido hasta $S = N + 11$, hay que seguir estudiando el tema:

RETROALIMENTACION DE CALCULOS: MÉTODO GENERADOR DE FORMULAS

Algo muy útil es el hecho de que al calcular el numero de formas $W_N(S)$ en la cual N dados pueden dar una suma S,es que indirectamente se esta calculando el numero de formas en las cuales una cantidad: $m = S - N$, de hasta un máximo de 11 círculos se pueden disponer en las N columnas sin que haya alguna columna con mas de 5 círculos. Este calculo es importante para seguir usando lo obtenido hasta este punto (retroalimentación del calculo), de manera que lo hacemos:

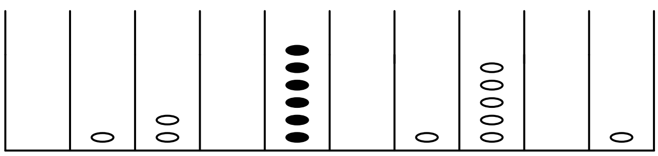
$$W_N(S) = \frac{(S-1)¡}{(N-1)¡.(S-N)¡} - \frac{N(S-7)¡}{(N-1)¡.(S-N-6)¡}$$

Aquí el numero de círculos: $m = S - N$,entonces la adaptación de la formula es:

$$W_N(m \leq 11) = \frac{(N+m-1)¡}{(N-1)¡.m¡} - \frac{N(N+m-7)¡}{(N-1)¡.(m-6)¡}$$

Esta ultima formula calcula el numero de formas en las cuales m círculos se pueden disponer en las N columnas, sin que haya mas de cinco círculos en alguna de ellas

Ahora bien: si tenemos más de 11 círculos hasta un máximo de 17 círculos, podemos implementar los siguientes esquemas (1 y 2) para contar las disposiciones impertinentes (**Esquema 1)**



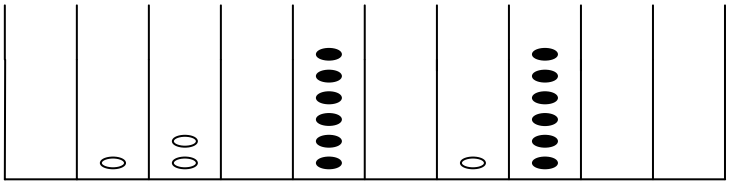
Primero hallamos el numero de formas $W_N(+6)$ en las que pueden disponerse los $m + 6 \leq 11 + 6$ círculos de forma que pueda haber una - y solo una – columna que pueda tener seis o mas círculos (esquema 1)

$$W_N(+6) = N \bullet W_N(m \leq 11)$$

$$W_N(+6) = N.\left[\frac{(N+m-1)!}{m!.(N-1)!} - \frac{N(N+m-7)!}{(m-6)!(N-1)!}\right]$$

Luego, contamos el numero de formas en las que pueden disponerse los círculos de manera que haya dos columnas con seis o mas círculos, tal como se muestra a continuación (esquema 2)

Esquema 2)



Aquí es el número de formas en la cual se pueden disponer dos tipos de elementos:
M_1 = Numero de formas en que se pueden disponer las dos columnas de seis círculos llenos
M_2 = Numero de formas en que se pueden disponer los $(S-N-12)$ círculos vacíos restantes

Tal numero de formas las denominamos $W_N(+2 \bullet 6)$,porque hay dos columnas con seis o mas de seis círculos. Es evidente que si una cosa se puede hacer de M_1 formas y la otra de M_2 formas independientes a la anterior, el número combinado de formas $W_N(+2 \bullet 6)$ es:

$$W_N(+2 \bullet 6) = M_1 \bullet M_2$$

$$M_1 = \frac{[2+(N-1)]!}{2!\bullet(N-1)!}$$

$$M_1 = \frac{(N+1)!}{2 \bullet (N-1)!}$$

$$M_2 = \frac{[S-N-12+(N-1)!}{(S-N-12)!.(N-1)!}$$

$$M_2 = \frac{(S-13)!}{(N-1)!.(S-N-12)}$$

$$W_N(+2 \bullet 6) = \frac{(N+1)!.(S-13)!}{[(N-1)!]^2.(S-N-12)!}$$

Este ultimo cálculo, se complementa totalmente al anterior, las dos columnas al superponerse los círculos vacíos a cada una de ellas dan lugar a columnas de hasta 11 círculos, en tanto que la superposición entre si de las dos columnas de seis círculos llenos ,dan columnas de doce círculos ,a las cuales si se superponen los círculos vacíos se llega a columnas de hasta 17 círculos, es decir que se cubre todas las disposiciones

No queda mas que sumar $W_N(+6)$ y $W_N(+2 \bullet 6)$ para obtener las disposiciones impertinentes totales Wi validas hasta 17 círculos sobre el nivel de unos

$$Wi = N.\left[\frac{(N+m-1)¡}{m¡•(N-1)¡} - \frac{N(N+m-7)¡}{(m-6)¡•(N-1)¡}\right] + \frac{(N+1)¡•(S-13)¡}{2.[(N-1)¡]^2 \bullet (S-N-12)¡}$$

Hay que restituir el valor equivalente de m ,que es el numero de círculos totales menos los seis de una columna, esto es de acuerdo a los esquemas utilizados:

$$m = S - N - 6$$

$$Wi = N.\left[\frac{(S-7)¡}{(N-1)¡•(S-N-6)¡} - \frac{N(S-13)¡}{(N-1)¡•(S-N-12)¡}\right] + \frac{(N+1)¡•(S-13)¡}{2.[(N-1)¡]^2 \bullet (S-N-12)¡}$$

Finalmente para hallar $W_N(S)$ valida para $S \le N + 17$

$$W_N(S) = \frac{(S-1)¡}{(N-1)¡•(S-N)¡} - N\left[\frac{(S-7)¡}{(N-1)¡•(S-N-6)¡} - \frac{N(S-13)¡}{(N-1)¡•(S-N-12)¡}\right] - \frac{(N+1)¡•(S-13)¡}{2.[(N-1)¡]^2 \bullet (S-N-12)¡}$$

Algunas cuentas:

Vamos a considerar el caso de 10 dados arrojados

Para la el numero de formas de que la suma de los puntos de los dados sea $S = 15$, podemos usar la formula valida para $S \le N + 5$

$$W_{10}(15) = \frac{14¡}{9¡.5¡}$$

$$W_{10}(15) = 2002$$

Para una suma igual a 20, hay que utilizar la primera extensión a la formula

$$W_{10}(20) = \frac{19¡}{9¡•10¡} - 10\frac{13¡}{9¡•4¡}$$

$$W_{10}(20) = 85.228$$

Para una suma igual a 25, ya hay que aplicar la segunda extensión a la formula

$$W_{10}(24) = \frac{24¡}{9¡•15¡} - 10 \bullet \left[\frac{18¡}{9¡•9¡} - \frac{10 \bullet 12¡}{9¡•3¡}\right] - \frac{11¡•12¡}{2 \bullet (9¡)^2 \bullet 3¡}$$

$$W_{10}(25) = 831.204$$

Estas cantidades en relación al numero total de formas M en que pueden salir 10 dados

$$M = 6^{10} = 60.466.176$$

La ultima formula, engorrosa como es, aun así no permite trazar la curva de probabilidades para $N = 10$ dados, porque faltan las probabilidades para sumas de $S = 28$ hasta $S = 3{,}5N = 35$,que es el valor mas probable.

Una ulterior extensión de la formula, habría que hacerla en la forma:

1 - Contando el número de formas en que puede haber una –y solo una – columna con seis o mas círculos

2 –Contando el numero de formas en que dos columnas –y solo dos columnas - con seis o mas círculos pueden aparecer

3 – Contando el numero de formas en que tres columnas con seis o mas círculos pueden formarse

Retroalimentando el método como se hizo en las extensión anterior, de mas esta decir que la expresión obtenida seria aun mucho mas extensa y seria valida para $W_{10}(S) \leq N + 23$,es decir calcularía hasta una suma de 33,para poder calcular hasta los 35 (y modelar totalmente la tirada de 10 dados), harían falta dos extensiones a la ultima formula obtenida

Esta claro que la resolución del problema de hallar la probabilidad de la suma de las caras en la tirada de dados es un problema de complejidad creciente, modelar completamente la tirada de 100 dados requeriría formulas enormes, la de un millón de dados, colosales

Hay otro asunto de complejidad mayor, es el de la probabilidad de que la suma sea mayor a un valor dado, y creo que es el limite de complejidad que puede ofrecer la tirada de dados, aquí no se puede ni siquiera tratar dicho problema, aun cuando puede hacerse mediante la suma de dichas probabilidades mediante las formulas halladas

Con la ultima formula se puede modelar completamente la tirada de 7 dados, en efecto, la suma que puede abarcarse con dicha formula

$$S(\max) = 7 + 17 = 24$$

Por simetría, desde el mayor puntaje posible(7•6=42),hacia abajo hasta una suma mínima:

$$S(\min) = 42 - 17 = 25$$

Es decir que esta cubierto todo el intervalo de sumas que arroja la tirada de siete dados

Si queremos saber el número de formas $W_{10}(35)$ con las formulas que tenemos, podemos dividir los diez dados en dos grupos, por ejemplo un grupo de siete dados y un grupo de tres dados, entonces:

$$W_{10}(35) = [W_7(32) \bullet W_3(3) + W_7(31) \bullet W_3(4) + W_7(30) \bullet W_3(5) + W_7(29) \bullet W_3(6) + ... + W_7(17) \bullet W_3(18)]$$

Son necesarias 16 engorrosas sumas

Una manera de ahorrar esfuerzo es dividir en dos grupos de 5,se hace el calculo de sumas hasta la mitad y luego se multiplica por dos

$$W_{10}(35) = 2.[W_5(30) \bullet W_5(5) + W_5(29) \bullet W_5(6) + W_5(28) \bullet W_5(7) + ... + W_5(18) \bullet W_5(17)]$$

Con 12 sumas basta, el calculo da:

$$W_{10}(35) = 4.395.456$$

$$P_{10}(35) = 0{,}0726928......$$

La probabilidad de la suma mas probable en la tirada de diez dados

CONCLUSION

Se ha visto que el problema del calculo de la suma de los puntos de las caras hacia arriba en la tirada de dados no es reducible a una expresión única acotada, sin embargo, el método de obtención de las formulas ,que es el de restar al numero de disposiciones totales de $(S-N)$ círculos sus disposiciones impertinentes calculadas estas con la retroalimentación del método basado en columnas de seis círculos, constituye la forma que los esquemas combinatorios pueden resolver el problema

RODOLFO CARABIO
rodolfohectorcarabio@yahoo.com.ar