

CORRESPONDENCIAS, RELACIONES Y APLICACIONES ENTRE CONJUNTOS

Carlos S. Chinae

0. Introducción

Es de enorme importancia en el quehacer de la matemática establecer la forma en que podemos relacionar los elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto, y también, los elementos de un mismo conjunto entre sí. Esto es, de qué forma podemos establecer relaciones que respeten o no las leyes internas en conjuntos con algún tipo de estructura algebraica, relaciones que tengan determinadas propiedades, que se puedan aplicar en la resolución de tipos especiales de problemas, etc.

Se trata, en definitiva de establecer cómo podemos relacionar un elemento con otro, esto es, establecer la conexión en cada uno de los pares de elementos que se puedan formar de manera que el primero pertenezca a uno de los conjuntos y el segundo al otro. Hemos de comenzar, resumiendo esto, por el estudio de los pares ordenados que podamos establecer desde dos conjuntos dados, es decir, del producto cartesiano de conjuntos.

1. Sobre el concepto de par ordenado:

De la teoría axiomática de conjuntos sabemos que, por el axioma 5 (Axioma de existencia del par no ordenado), es:

$$(\forall x, y)(Cx \wedge Cy \rightarrow C\{x, y\})$$

esto es, si x e y son conjuntos, entonces el par no ordenado $\{x, y\}$ es también un conjunto.

Partiendo de un par no ordenado de objetos $\{x, y\}$, podemos configurar un cierto orden considerando el conjunto de sus partes $P(\{x, y\}) = \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \emptyset\}$, pues nos permite definir los conjuntos

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$
$$(y, x) = \{\{y\}, \{x, y\}\}$$

que llevan implícito un orden en sus dos componentes.

El conjunto (x, y) se denomina par ordenado, de primera componente o proyección x , y de segunda componente o proyección y . El segundo, (y, x) , es igualmente un par ordenado donde cambia el orden de sus componentes o proyecciones. Se tiene, resumiendo, que:

En el par ordenado $u = (x, y)$, se tiene que $x = pr_1u$, $y = pr_2u$.

En el par ordenado $v = (y, x)$, se tiene que $x = pr_2v$, $y = pr_1v$.

Podemos, definitivamente, establecer la siguiente definición:

Definición 1.1

Dados los objetos x e y , se denomina par ordenado al conjunto binario $(x, y) = \{x, \{x, y\}\}$. Si $z = (x, y)$ es un par ordenado, entonces x se denomina primera componente o primera proyección del par, e y segunda componente o segunda proyección del par:

$$x = pr_1z$$

$$y = pr_2z$$

Teorema 1.1: (Criterio de igualdad de pares ordenados)

Se verifica la equivalencia:

$$(x, y) = (m, n) \Leftrightarrow x = m \wedge y = n$$

Demostración:

Es inmediato, pues haciendo $x = y \Rightarrow (x, y) = (x, x) = \{\{x\}, \{x, x\}\}$, y si $(x, y) = (m, n)$, será $(x, x) = (m, m) = \{\{m\}, \{m, m\}\} \Rightarrow x = m$

Si consideramos ahora $x \neq y \Rightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x, n\}\} \Rightarrow \{x, y\} = \{x, n\} \Rightarrow y = n$

Definición 1.2:

- Para tres objetos cualesquiera, x, y, z , se define la terna ordenada por

$$(x, y, z) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$$

que puede expresarse indistintamente por $((x, y), z)$ o por $(x, (y, z))$.

- Para n objetos cualesquiera, x_1, x_2, \dots, x_n , se define la n -upla ordenada de manera análoga, por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\}$$

Teorema 1.2: (Criterio de igualdad de ternas y n -uplas ordenadas)

a) $(x, y, z) = (m, n, p) \Rightarrow x = m, y = n, z = p$

b) $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Rightarrow x_i = y_i, i = 1, 2, \dots, n$

Demostración:

Es inmediato, pues se trata de repetir el razonamiento para la igualdad de pares ordenados.

2. Producto de conjuntos:

Definición 2.1:

Un conjunto, G , se dice que es un grafo si todos sus elementos son pares ordenados.

$$G \text{ grafo} \Leftrightarrow G = \{z / z = (x, y)\}$$

Definición 2.2:

Se denomina producto cartesiano de los conjuntos A y B , representándose por $A \times B$, al grafo cuyas primeras proyecciones son todos los elementos de A y cuyas segundas proyecciones son todos los elementos de B

$$P = A \times B = \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

Por abuso del lenguaje se acostumbra a decir que A es la primera proyección y B es la segunda proyección del producto cartesiano $A \times B$:

$$A = pr_1 P, \quad B = pr_2 P$$

Definición 2.3:

- Para tres conjuntos, A , B y C , se define su producto cartesiano por

$$P = A \times B \times C = \{(x, y, z) / x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}$$

- Para n conjuntos, A_1, \dots, A_n , se define su producto cartesiano por

$$P = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge \dots \wedge x_n \in A_n\}$$

Teorema 2.1:

Si A y B son no vacíos, se verifica que

$$A \neq B \rightarrow A \times B \neq B \times A$$

Demostración:

Si $A \neq B \rightarrow \exists x \in A / x \notin B \vee \exists y \in B / y \notin A$

Supongamos que $\exists x \in A / x \notin B \rightarrow \exists x \in A / x \notin B \wedge B \neq \emptyset \rightarrow$

$\rightarrow \exists y \in B / (x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin B \times A \rightarrow A \times B \neq B \times A$

Análogamente si suponemos que $\exists y \in B / y \notin A$

Teorema 2.2:

Para tres conjuntos no vacíos cualesquiera, A , B , C , se verifica que:

1) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

2) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Demostración:

1) Veamos que se verifica la doble inclusión:

$$\begin{aligned} \forall(x, u) \in Ax(B \cup C) &\rightarrow x \in A \wedge u \in B \cup C \rightarrow x \in A \wedge u \in B \vee u \in C \rightarrow \\ &\rightarrow (x \in A \wedge u \in B) \vee (x \in A \wedge u \in C) \rightarrow (x, y) \in AxB \vee (x, y) \in AxC \rightarrow \\ &\rightarrow (x, y) \in (AxB) \cup (AxC) \end{aligned}$$

De lo cual $Ax(B \cup C) \subseteq (AxB) \cup (AxC)$

$$\begin{aligned} \forall(x, u) \in (AxB) \cup (AxC) &\rightarrow (x, u) \in (AxB) \vee (x, u) \in (AxC) \rightarrow (x \in A \wedge u \in B) \vee \\ &\vee (x \in A \wedge u \in C) \rightarrow x \in A \wedge (u \in B \vee u \in C) \rightarrow x \in A \wedge u \in (B \cup C) \rightarrow \\ &\rightarrow (x, y) \in Ax(B \cup C) \end{aligned}$$

Por consiguiente $(AxB) \cup (AxC) \subseteq Ax(B \cup C)$

Y de la doble inclusión:

$$\left. \begin{aligned} Ax(B \cup C) &\subseteq (AxB) \cup (AxC) \\ (AxB) \cup (AxC) &\subseteq Ax(B \cup C) \end{aligned} \right\} \rightarrow Ax(B \cup C) = (AxB) \cup (AxC)$$

2) Veamos también que se verifica la doble inclusión:

$$\begin{aligned} \forall(x, u) \in Ax(B \cap C) &\rightarrow x \in A \wedge u \in B \cap C \rightarrow x \in A \wedge u \in B \wedge u \in C \rightarrow \\ &\rightarrow (x \in A \wedge u \in B) \wedge (x \in A \wedge u \in C) \rightarrow (x, y) \in AxB \wedge (x, y) \in AxC \rightarrow \\ &\rightarrow (x, y) \in (AxB) \cap (AxC) \end{aligned}$$

Por tanto es $Ax(B \cap C) \subseteq (AxB) \cap (AxC)$

$$\begin{aligned} \forall(x, u) \in (AxB) \cap (AxC) &\rightarrow (x, u) \in (AxB) \wedge (x, u) \in (AxC) \rightarrow (x \in A \wedge u \in B) \wedge \\ &\wedge (x \in A \wedge u \in C) \rightarrow x \in A \wedge (u \in B \wedge u \in C) \rightarrow x \in A \wedge u \in (B \cap C) \rightarrow \\ &\rightarrow (x, y) \in Ax(B \cap C) \end{aligned}$$

Por lo que $(AxB) \cap (AxC) \subseteq Ax(B \cap C)$

Y por la doble inclusión:

$$\left. \begin{aligned} Ax(B \cap C) &\subseteq (AxB) \cap (AxC) \\ (AxB) \cap (AxC) &\subseteq Ax(B \cap C) \end{aligned} \right\} \rightarrow Ax(B \cap C) = (AxB) \cap (AxC)$$

Teorema 2.3:

Se verifican las siguientes relaciones:

$$1) (A_1xB_1) \cup (A_2xB_2) \subset (A_1 \cup A_2)x(B_1 \cup B_2)$$

$$2) (A_1xB_1) \cap (A_2xB_2) = (A_1 \cap A_2)x(B_1 \cap B_2)$$

Demostración:

1) Veamos que la inclusión solo se verifica en un único sentido:

$$\begin{aligned} \forall(a, b) \in (A_1xB_1) \cup (A_2xB_2) &\rightarrow (a, b) \in (A_1xB_1) \vee (a, b) \in (A_2xB_2) \rightarrow \\ &\rightarrow (a \in A_1 \wedge b \in B_1) \vee (a \in A_2 \wedge b \in B_2) \rightarrow (a \in A_1 \vee a \in A_2) \wedge (b \in B_1 \vee b \in B_2) \rightarrow \\ &\rightarrow a \in (A_1 \cup A_2) \wedge b \in (B_1 \cup B_2) \rightarrow (a, b) \in (A_1 \cup A_2)x(B_1 \cup B_2) \end{aligned}$$

De donde $(A_1xB_1) \cup (A_2xB_2) \subset (A_1 \cup A_2)x(B_1 \cup B_2)$

Veamos que no se verifica la inclusión recíproca:

$$\begin{aligned}
& \forall (a, b) \in (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) \rightarrow a \in (A_1 \cup A_2) \wedge b \in (B_1 \cup B_2) \rightarrow (a \in A_1 \vee a \in A_2) \wedge \\
& \wedge (b \in B_1 \vee b \in B_2) \rightarrow ((a \in A_1 \vee a \in A_2) \wedge b \in B_1) \vee ((a \in A_1 \vee a \in A_2) \wedge b \in B_2) \rightarrow \\
& \rightarrow (a \in A_1 \wedge b \in B_1) \vee (a \in A_2 \wedge b \in B_1) \vee (a \in A_1 \wedge b \in B_2) \vee (a \in A_2 \wedge b \in B_2) \rightarrow \\
& \rightarrow (a, b) \in A_1 \times B_1 \vee (a, b) \in A_2 \times B_1 \vee (a, b) \in A_1 \times B_2 \vee (a, b) \in A_2 \times B_2 \rightarrow \\
& \rightarrow (a, b) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) \vee (a, b) \in (A_2 \times B_1) \cup (A_1 \times B_2)
\end{aligned}$$

Es decir $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$ no está contenido en $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$

2) Veamos que en este caso sí se verifica la doble inclusión:

$$\begin{aligned}
& \forall (a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \rightarrow (a, b) \in (A_1 \times B_1) \wedge (a, b) \in (A_2 \times B_2) \rightarrow \\
& \rightarrow (a \in A_1 \wedge b \in B_1) \wedge (a \in A_2 \wedge b \in B_2) \rightarrow (a \in A_1 \wedge a \in A_2) \wedge (b \in B_1 \wedge b \in B_2) \rightarrow \\
& \rightarrow a \in (A_1 \cap A_2) \wedge b \in (B_1 \cap B_2) \rightarrow (a, b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)
\end{aligned}$$

Por lo cual $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$

$$\begin{aligned}
& \forall (a, b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \rightarrow a \in A_1 \cap A_2 \wedge b \in B_1 \cap B_2 \rightarrow a \in A_1 \wedge \\
& \wedge a \in A_2 \wedge b \in B_1 \wedge b \in B_2 \rightarrow (a, b) \in A_1 \times B_1 \wedge (a, b) \in A_2 \times B_2 \rightarrow \\
& \rightarrow (a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)
\end{aligned}$$

Por lo que $(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$

Y de la doble inclusión:

$$\left. \begin{aligned}
& (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \subseteq (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \\
& (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)
\end{aligned} \right\} \rightarrow (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

Teorema 2.4:

Se verifican las relaciones:

- 1) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
- 2) $(B' \times C) \subseteq (B \times C)'$

Demostración:

1) Veamos la doble inclusión:

$$\begin{aligned}
& \forall (a, b) \in (A - B) \times C \rightarrow a \in A - B \wedge b \in C \rightarrow a \in A \wedge a \notin B \wedge b \in C \rightarrow \\
& \rightarrow (a, b) \in A \times C \wedge (a, b) \notin B \times C \rightarrow (a, b) \in (A \times C) - (B \times C)
\end{aligned}$$

Es decir $(A - B) \times C \subseteq (A \times C) - (B \times C)$

$$\begin{aligned}
& \forall (a, b) \in (A \times C) - (B \times C) \rightarrow (a, b) \in (A \times C) \wedge (a, b) \notin (B \times C) \rightarrow (a \in A \wedge b \in C) \wedge \\
& \wedge (a \notin B \wedge b \in C) \rightarrow (a \in A \wedge a \notin B) \wedge b \in C \rightarrow a \in A - B \wedge b \in C \rightarrow \\
& \rightarrow (a, b) \in (A - B) \times C
\end{aligned}$$

Por tanto, es $(A \times C) - (B \times C) \subseteq (A - B) \times C$

Y por la doble inclusión:

$$\left. \begin{aligned}
& (A - B) \times C \subseteq (A \times C) - (B \times C) \\
& (A \times C) - (B \times C) \subseteq (A - B) \times C
\end{aligned} \right\} \rightarrow (A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

2) Veamos que en este caso no se verifica la doble inclusión, sino solo la inclusión en el sentido indicado:

$$\forall (a, b) \in (B' \times C) \rightarrow a \in B' \wedge b \in C \rightarrow a \notin B \wedge b \in C \rightarrow (a, b) \notin B \times C \rightarrow (a, b) \in (B \times C)'$$

Por consiguiente, es $B' \times C \subseteq (B \times C)'$

Veamos que no se verifica la inclusión recíproca:

$$\begin{aligned} \forall (a, b) \in (B \times C)' \rightarrow (a, b) \notin B \times C \rightarrow (a \in B \wedge b \notin C) \vee (a \notin B \wedge b \in C) \vee (a \notin B \wedge b \notin C) \rightarrow \\ \rightarrow (a, b) \in (B \times C)' \vee (a, b) \in (B' \times C) \vee (a, b) \in (B \times C)' \end{aligned}$$

Por lo cual no necesariamente está $(B \times C)'$ contenido en $(B' \times C)$

Teorema 2.5:

Se verifica la asociatividad en el producto cartesiano de conjuntos:

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

Demostración:

Es inmediato, pues la definición lleva implícito que

$$A \times B \times C = A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = \{(x, y, z) / x \in A \wedge y \in B \wedge z \in C\}$$

3. Correspondencias

Definición 3.1:

Una correspondencia entre dos conjuntos, A y B , es una terna ordenada, $f = (G; A, B)$ donde G es un grafo tal que $pr_1 G \subseteq A$ y $pr_2 G \subseteq B$.

Definición 3.2:

Dada la correspondencia $f = (G; A, B)$, si $(x, y) \in G$, se dice que y corresponde a x por la correspondencia f , o bien, que $y = f(x)$.

A se llama conjunto inicial o conjunto de partida de la correspondencia:

$$A = ini f$$

B se llama conjunto final o conjunto de llegada de la correspondencia:

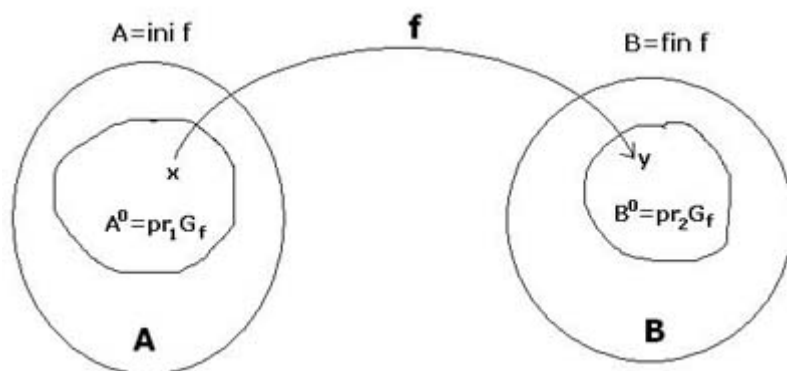
$$B = fin f$$

$A^0 = pr_1 G$ se llama conjunto de definición u original de la correspondencia:

$$A^0 = pr_1 G = ori f$$

$B^0 = pr_2 G$ se llama conjunto de valores o imagen de la correspondencia:

$$B^0 = pr_2 G = img f$$



Teorema 3.1:

Se verifica que:

- para todo elemento del conjunto de definición de una correspondencia existe un elemento del conjunto final de modo que el par pertenece al grafo.
- para todo elemento del conjunto de valores de una correspondencia existe un elemento del conjunto inicial de modo que el par pertenece al grafo.

$$(\forall x)(x \in pr_1 G \leftrightarrow (\exists y)(y \in B \wedge (x, y) \in G))$$

$$(\forall y)(y \in pr_2 G \leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge (x, y) \in G))$$

Demostración:

Trivial, de la definición.

Definición 3.3:

Dada la correspondencia $f = (G; A, B)$, se define, $\forall X \subseteq A$:

$$f(X) = \{y / \exists x \in X \wedge (x, y) \in G\}$$

Obviamente es: $f(A) = \{y / \exists x \in A \wedge (x, y) \in G\} = pr_2 G$

Teorema 3.2:

Sea la correspondencia $f = (G; A, B)$. Se verifica que

$$X \subseteq Y \subseteq A \Rightarrow f(X) \subseteq f(Y)$$

Demostración:

$\forall y \in f(X), \exists x \in X \wedge (x, y) \in G \rightarrow x \in X \wedge (x, y) \in G \wedge X \subseteq Y \rightarrow$
 $\rightarrow x \in Y \wedge (x, y) \in G \rightarrow y \in f(Y)$
 por tanto, $f(X) \subseteq f(Y)$

Corolario:

Dada la correspondencia $f = (G; A, B)$, se tiene que:

$$\forall X \subseteq A \Rightarrow f(X) \subseteq f(A) = pr_2 G = im f$$

Teorema 3.3:

Sea la correspondencia $f = (G; A, B)$, y sean $U, W \subseteq A$. Se verifica:

- 1) $f(U \cup W) = f(U) \cup f(W)$
- 2) $f(U \cap W) \subseteq f(U) \cap f(W)$

Demostración:

1) Veamos que se verifica la doble inclusión:

$\forall n \in f(U \cup W), \exists m \in U \cup W / f(m) = n \rightarrow \exists m / m \in U \vee m \in W / f(m) \in f(U) \vee$
 $\vee f(m) \in f(W) \rightarrow f(m) \in f(U) \cup f(W) \wedge n = f(m) \rightarrow n \in f(U) \cup f(W)$
 por lo cual $f(U \cup W) \subseteq f(U) \cup f(W)$

$\forall n \in f(U) \cup f(W) \rightarrow n \in f(U) \vee n \in f(W) \rightarrow \exists m \in U / f(m) = n \vee$
 $\vee \exists m \in W / f(m) = n \rightarrow \exists m \in U \cup W / f(m) = n \rightarrow n \in f(U \cup W)$

cumpléndose que $f(U) \cup f(W) \subseteq f(U \cup W)$

y de la doble inclusión:

$$\left. \begin{array}{l} f(U \cup W) \subseteq f(U) \cup f(W) \\ f(U) \cup f(W) \subseteq f(U \cup W) \end{array} \right\} \rightarrow f(U \cup W) = f(U) \cup f(W)$$

2) Veamos que solamente hay inclusión en un único sentido:

$\forall n \in f(U \cap W), \exists m \in U \cap W / f(m) = n \rightarrow \exists m / m \in U \wedge m \in W / f(m) \in f(U) \wedge$
 $\wedge f(m) \in f(W) \rightarrow f(m) \in f(U) \cap f(W) \wedge n = f(m) \rightarrow n \in f(U) \cap f(W)$
 por lo cual $f(U \cap W) \subseteq f(U) \cap f(W)$

$\forall n \in f(U) \cap f(W), \exists m \in U \wedge \exists p \in W / f(m) = n \wedge f(p) = n$, sin que tenga que ser necesariamente $m = p$. Es decir, tanto m como p pueden no pertenecer a la intersección $U \cap W$, por lo que $f(m) = f(p) = n$ no necesariamente ha de pertenecer a $f(U \cap W)$, no cumpliéndose, en definitiva, la inclusión recíproca $f(U) \cap f(W) \subseteq f(U \cap W)$.

Veamos, de todos modos, un contraejemplo simple, donde se comprueba que no se da dicha inclusión.

CONTRAEJEMPLO: Sea $f = (G; A, B)$ con $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, y cuyo grafo es $G = \{(a, 0), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 3), (c, 0), (c, 1), (d, 3), (e, 0), (e, 3)\}$

Sean $U = \{a, b, c\}$, $W = \{c, d, e\}$, con lo que $U \cap W = \{c\}$. Se tiene:

$$f(U) = \{0, 1, 2, 3\}, f(W) = \{0, 1, 3\}, f(U \cap W) = \{0, 1\}, f(U) \cap f(W) = \{0, 1, 3\}$$

Observamos por consiguiente que es $f(U \cap W) \subset f(U) \cap f(W)$, pero no se verifica que $f(U) \cap f(W) \subset f(U \cap W)$

Teorema 3.4:

Para cualquier correspondencia f de grafo G se verifica necesariamente que $f(pr_1 G) = pr_2 G$.

Demostración:

Sea $f = (G; A, B)$, se tienen las proyecciones:

$$pr_1 G = \{x \in A / f(x) \in B\}, pr_2 G = \{x \in A / x \in pr_1 G \wedge f(x) \in B\}$$

Por teorema 3.2: $f(pr_1 G) \subseteq f(A) = pr_2 G$.

$\forall z \in pr_2 G, \exists x \in pr_1 G \wedge f(x) = z \rightarrow z \in f(pr_1 G)$. O sea: $pr_2 G \subseteq f(pr_1 G)$

$$\left. \begin{array}{l} f(pr_1 G) \subseteq pr_2 G \\ pr_2 G \subseteq f(pr_1 G) \end{array} \right\} \rightarrow f(pr_1 G) = pr_2 G$$

Definición 3.4: (grafo recíproco, correspondencia recíproca)

- Dada la correspondencia $f = (G; A, B)$, se llama grafo recíproco del grafo G al conjunto $G^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in G\}$.

es decir: $pr_1 G^{-1} = pr_2 G \subseteq B$, $pr_2 G^{-1} = pr_1 G \subseteq A$

- Se denomina correspondencia recíproca de la correspondencia $f = (G; A, B)$ a la correspondencia $f^{-1} = (G^{-1}; B, A)$

Es obvio que $(G^{-1})^{-1} = G$, por lo que $(f^{-1})^{-1} = ((G^{-1})^{-1}; A, B) = (G; A, B) = f$

Definición 3.5: (unión e intersección de correspondencias)

- Se define la correspondencia unión de las correspondencias $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; A, B)$ como la correspondencia $f \cup g = (G_f \cup G_g; A, B)$.

- Se llama correspondencia intersección de las correspondencias $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; A, B)$ a la correspondencia $f \cap g = (G_f \cap G_g; A, B)$.

Definición 3.6: (grafo complementario, correspondencia complementaria)

- Dada la correspondencia $f = (G; A, B)$, se llama grafo complementario del grafo G al conjunto $\bar{G} = \{(x, y) / (x, y) \in Ax B \wedge (x, y) \notin G\}$
- Se denomina correspondencia complementaria de la correspondencia $f = (G; A, B)$ a la correspondencia $\bar{f} = (\bar{G}; A, B)$

Definición 3.7: (implicación o inclusión)

Sean las correspondencias $f_1 = (G_1; A, B)$ y $f_2 = (G_2; A, B)$.

Se dice que f_1 implica f_2 , o bien, que f_1 está contenida en f_2 si se verifica que $G_1 \subseteq G_2$.

$$f_1 \rightarrow f_2 \Leftrightarrow G_1 \subseteq G_2$$

O bien

$$f_1 \subseteq f_2 \Leftrightarrow G_1 \subseteq G_2$$

PROPIEDADES. Como vemos, cualquier propiedad de las operaciones antes definidas se reduce a la propiedad homónima entre los correspondientes grafos, es decir, entre conjuntos. Por ello, todas estas operaciones, unión, intersección, complementación o inclusión, verifican las mismas propiedades que estas operaciones tienen en la teoría de conjuntos.

Definición 3.8: (composición de grafos)

Sean las correspondencias $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; B, C)$. Se define la composición o producto de G_f por G_g como

$$G_f \circ G_g = \{(x, z) / (\exists y)(y \in pr_2 G_f \cap pr_1 G_g \wedge (x, y) \in G_f \wedge (y, z) \in G_g)\}$$

Teorema 3.5:

Consideremos las correspondencias $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; B, C)$. Los grafos verifican lo siguiente:

- 1) $G_f \circ G_g$ es un grafo.
- 2) $pr_2 G_f \cap pr_1 G_g \neq \emptyset \rightarrow G_f \circ G_g \neq \emptyset$
- 3) $pr_1(G_f \circ G_g) \subseteq pr_1 G_f$
- 4) $pr_2(G_f \circ G_g) \subseteq pr_2 G_g$

Demostración:

- 1) Es obvio, pues se trata de un conjunto de pares ordenados.
- 2) Por la definición de composición de grafos, si fuera $G_f \circ G_g = \emptyset$ entonces se tendría que no existe un $y \in pr_2 G_f \cap pr_1 G_g / (x, y) \in G_f \wedge (y, z) \in G_g$, por lo que sería $pr_2 G_f \cap pr_1 G_g = \emptyset$, por lo cual $pr_2 G_f \cap pr_1 G_g \neq \emptyset \rightarrow G_f \circ G_g \neq \emptyset$.
- 3) $\forall x \in pr_1(G_f \circ G_g) \rightarrow (\exists y)(y \in pr_2 G_f \cap pr_1 G_g) / (x, y) \in G_f \rightarrow x \in pr_1 G_f$
- 4) $\forall z \in pr_2(G_f \circ G_g) \rightarrow (\exists y)(y \in pr_2 G_f \cap pr_1 G_g) / (y, z) \in G_g \rightarrow z \in pr_2 G_g$

Teorema 3.6:

Consideremos las correspondencias $f = (G_f; A, B)$, $g = (G_g; B, C)$ y $h = (G_h; C, D)$.

Se verifican las igualdades siguientes:

- 1) $(G_f \circ G_g)^{-1} = G_g^{-1} \circ G_f^{-1}$
- 2) $(G_f \circ G_g) \circ G_h = G_f \circ (G_g \circ G_h)$

Demostración:

1)

$$\begin{aligned} (x, z) \in (G_f \circ G_g)^{-1} &\leftrightarrow (z, x) \in G_f \circ G_g \leftrightarrow (\exists y)(y \in pr_2 G_f \cap pr_1 G_g \wedge (z, y) \in G_f \wedge \\ &\wedge (y, x) \in G_g) \leftrightarrow (\exists y)(y \in pr_2 G_g^{-1} \cap pr_1 G_f^{-1} \wedge (y, z) \in G_g^{-1} \wedge (x, y) \in G_f^{-1}) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (x, z) \in G_g^{-1} \circ G_f^{-1} \end{aligned}$$

En definitiva: $(G_f \circ G_g)^{-1} = G_g^{-1} \circ G_f^{-1}$

2) Llamemos $G_1 = G_f \circ G_g$ y $G_2 = G_g \circ G_h$, y probemos que $G_1 \circ G_h = G_f \circ G_2$

Veamos que se verifica, para G_1 y G_2 , lo siguiente:

- a) $(x, z) \in G_1 \leftrightarrow (x, z) \in G_f \circ G_g \leftrightarrow (\exists u)(u \in pr_2 G_f \cap pr_1 G_g \wedge (x, u) \in G_f \wedge (u, z) \in G_g)$
- b) $(u, w) \in G_2 \leftrightarrow (u, w) \in G_g \circ G_h \leftrightarrow (\exists z)(z \in pr_2 G_g \cap pr_1 G_h \wedge (u, z) \in G_g \wedge (z, w) \in G_h)$

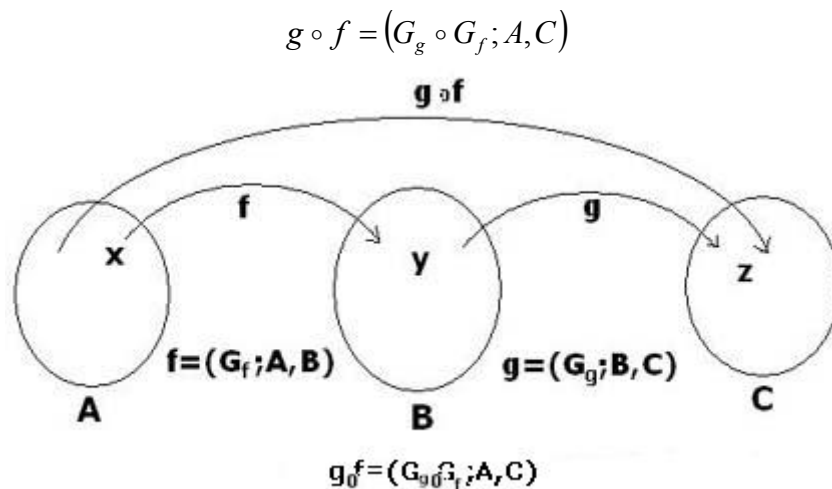
Por consiguiente:

$$\begin{aligned} (x, w) \in G_1 \circ G_h &\leftrightarrow (\exists z)(z \in pr_2 G_1 \cap pr_1 G_h \wedge (x, z) \in G_1 \wedge (z, w) \in G_h) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\exists z)(\exists u)((x, u) \in G_f \wedge (u, z) \in G_g \wedge (z, w) \in G_h) \end{aligned}$$

Por lo cual es $G_1 \circ G_h = G_f \circ G_2$, o bien $(G_f \circ G_g) \circ G_h = G_f \circ (G_g \circ G_h)$

Definición 3.9: (composición de correspondencias)

Sean las correspondencias $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; B, C)$. Se llama composición o producto de g por f a la correspondencia cuyo grafo es la composición de sus grafos y cuyo conjunto inicial es el conjunto inicial de f , y cuyo conjunto final es el conjunto final de g :



Teorema 3.7:

$$\forall X \subseteq A, (g \circ f)(X) = g[f(X)]$$

Demostración:

$$\begin{aligned} y \in (g \circ f)(X) &\leftrightarrow (\exists x)(x \in X \wedge y = (g \circ f)(x)) \leftrightarrow (\exists x)(x \in X \wedge (x, y) \in G_f \circ G_g) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow (\exists z)(z \in pr_2 G_f \cap pr_1 G_g \wedge (x, z) \in G_f \wedge (z, y) \in G_g) \leftrightarrow (\exists x)(\exists z)(z = f(x) \wedge \\ &\wedge y = g(z)) \leftrightarrow (\exists x)(x \in X \wedge y = g[f(x)]) \leftrightarrow y \in g[f(X)] \end{aligned}$$

Teorema 3.8:

Cualesquiera que sean las correspondencias f_1, f_2, f_3 , se verifica:

- 1) $(f_1 \circ f_2) \circ f_3 = f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$
- 2) $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$
- 3) $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$

Demostración:

- 1) Es obvio, por la propiedad asociativa del producto de grafos (teorema 3.6_2)).
- 2) Obvio también, por la propiedad $(G_f \circ G_g)^{-1} = G_g^{-1} \circ G_f^{-1}$, probada en el teorema 3.6_1).
- 3) Se verifica, al no ser conmutativo el producto de grafos, pues en general, no estaría definido en uno de los dos sentidos.

Definición 3.10:

- 1) Un grafo G es *diagonal* si se verifica:

$$\forall (x, y) \in G, x = y$$

- 2) Un grafo G se dice *unívoco* si se cumple que:

$$\forall (x, y), (x, y') \in G, y = y'$$

- 3) Un grafo G se dice *inyectivo* si es

$$\forall (x, y), (x', y) \in G, x = x'$$

Definición 3.11:

Sea la correspondencia $f = (G; A, B)$.

- 1) Se dice que f es *idéntica* si su grafo es diagonal

$$f \text{ idéntica} \Leftrightarrow G \text{ diagonal}$$

- 2) Se dice que f es *unívoca* si su grafo es unívoco.

$$f \text{ unívoca} \Leftrightarrow G \text{ unívoco}$$

3) Se dice que f es *inyectiva* si su grafo es inyectivo.

$$f \text{ inyectiva} \Leftrightarrow G \text{ inyectivo}$$

4) Se dice que f es *suprayectiva* si la imagen del conjunto inicial coincide con el conjunto final.

$$f \text{ suprayectiva} \Leftrightarrow \text{im}f = f(A) = f \text{ inf} = B$$

5) Se dice que f es *biyectiva* si es inyectiva y también suprayectiva.

$$f \text{ biyectiva} \Leftrightarrow \forall (x, y), (x', y) \in G, x = x' \wedge \text{im}f = f(A) = f \text{ inf} = B$$

Teorema 3.9:

Si la correspondencia $f = (G; A, B)$ es idéntica, entonces

$$f = f^{-1} = (G^{-1}; A, A)$$

Demostración:

Si f es idéntica, entonces $f = (G; A, A) \rightarrow \forall (x, y) \in G \wedge x = y \rightarrow (x, y) \in G^{-1} \rightarrow$
 $\rightarrow G^{-1} = G \rightarrow f = (G^{-1}; A, A)$

4. Relaciones binarias

Las relaciones binarias son correspondencias de un conjunto A en sí mismo:

$$f = (R; A, B) \text{ relac. binaria en } A \Leftrightarrow A = B$$

donde hemos llamado R al correspondiente grafo.

La notación $(x, y) \in R$ es, en lo que sigue, equivalente a xRy .

También usaremos R para indicar tanto el nombre de la relación como el de su grafo.

Definición 4.1:

- 1) R es reflexiva en $A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow (x, x) \in R)$
- 2) R es irreflexiva en $A \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \leftrightarrow (x, x) \notin R)$
- 3) R es simétrica en $A \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \in R)$
- 4) R es asimétrica en $A \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \notin R)$
- 5) R es antisimétrica en $A \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \leftrightarrow x = y)$
- 6) R es transitiva en $A \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R)$
- 7) R es intransitiva en $A \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \notin R)$

Teorema 4.1:

- 1) R reflexiva $\Leftrightarrow R^{-1}$ reflexiva.
- 2) R irreflexiva $\Leftrightarrow R^{-1}$ irreflexiva.
- 3) R simétrica $\Leftrightarrow R^{-1}$ simétrica.
- 4) R asimétrica $\Leftrightarrow R^{-1}$ asimétrica.
- 5) R antisimétrica $\Leftrightarrow R^{-1}$ antisimétrica.
- 6) R transitiva $\Leftrightarrow R^{-1}$ transitiva.
- 7) R intransitiva $\Leftrightarrow R^{-1}$ intransitiva.

Demostración:

- 1) $R \text{ reflex} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \wedge (x, x) \in R) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \wedge (x, x) \in R^{-1}) \Leftrightarrow R^{-1} \text{ reflex}$
- 2) $R \text{ irreflex} \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \wedge (x, x) \notin R) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \wedge (x, x) \notin R^{-1}) \Leftrightarrow R^{-1} \text{ irreflex}$
- 3) $R \text{ simétr} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge ((y, x) \in R^{-1} \rightarrow (x, y) \in R^{-1})) \Leftrightarrow R^{-1} \text{ simétr}$
- 4) $R \text{ asimétr} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge ((x, y) \in R \leftrightarrow (y, x) \notin R)) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge ((y, x) \in R^{-1} \leftrightarrow (x, y) \notin R^{-1})) \Leftrightarrow R^{-1} \text{ asimétr}$
- 5) $R \text{ antisimétr} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge ((x, y) \in R \wedge (y, x) \in R) \rightarrow x = y) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(x \in A \wedge ((y, x) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in R^{-1}) \rightarrow x = y) \Leftrightarrow R^{-1} \text{ antisimétr}$
- 6) $R \text{ transitiv} \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \wedge ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \wedge ((y, x) \in R^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1}) \rightarrow (z, x) \in R) \Leftrightarrow R^{-1} \text{ transitiv}$

$$7) R \text{ int ran} \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \wedge ((x, y) \in R \wedge (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \notin R) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \in A \wedge ((y, x) \in R^{-1} \wedge (z, y) \in R^{-1}) \rightarrow (z, x) \notin R) \leftrightarrow R^{-1} \text{ int ran}$$

Teorema 4.2:

$$\forall R, R \cup R^{-1} \text{ es simétrica}$$

Demostración:

$$\text{Puesto que } R \cup R^{-1} = \{(x, y) / (x, y) \in R \vee (x, y) \in R^{-1}\}.$$

Para $(x, y) \in R \cup R^{-1}$ se tiene:

- Si $(x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R^{-1}$. Es decir, en este caso $(y, x) \in R \cup R^{-1}$
- Si $(x, y) \notin R \rightarrow (x, y) \in R^{-1} \rightarrow (y, x) \in R$, y también $(y, x) \in R \cup R^{-1}$

Por consiguiente:

$$\forall (x, y) \in R \cup R^{-1} \rightarrow (y, x) \in R \cup R^{-1} \rightarrow R \cup R^{-1} \text{ simétrica}$$

4.1. Las Relaciones de Equivalencia

Definición 4.1.1:

Una relación binaria R se dice que es de equivalencia si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Definición 4.1.2:

Si R es una relación de equivalencia en un conjunto A , se denomina clase de equivalencia de representante $x \in A$ al conjunto de los elementos de A que se relacionan con x por la relación R .

Teorema 4.1.1:

Sea R es una relación de equivalencia en un conjunto A , y sea $\{[x]\}_{x \in A}$ la familia de las clases de equivalencia de A por la relación R . Entonces dicha familia es una partición del conjunto A .

Demostración:

Se trata de probar que la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto A , y que la intersección de dos clases cualesquiera es vacía.

1) Veamos que $\bigcup_{x \in A} [x] = A$:

$$\forall x \in A, xRx \rightarrow \exists [x] \neq \emptyset / x \in [x] \rightarrow x \in \bigcup_{x \in A} [x] \rightarrow A \subseteq \bigcup_{x \in A} [x]$$

y como, obviamente, $\bigcup_{x \in A} [x] \subseteq A$, se deduce de la doble inclusión que $\bigcup_{x \in A} [x] = A$

2) Veamos ahora que $\forall [x], [y], [x] \cap [y] = \emptyset \vee [x] = [y]$:

Consideremos dos clases distintas $[x] \neq [y]$ y veamos una reducción al absurdo si suponemos que no son disjuntas:

$$\text{Si fuera } [x] \cap [y] \neq \emptyset \rightarrow \exists z \in [x] \cap [y] \rightarrow z \in [x] \wedge z \in [y] \rightarrow xRz \wedge zRy \rightarrow xRy \rightarrow \\ \rightarrow x \in [y] \wedge y \in [x] \rightarrow [x] = [y], \text{ en contradicción con la hipótesis } ([x] \neq [y]).$$

Teorema 4.1.2:

Toda partición o clasificación $\{p_j\}$ de un conjunto A induce una relación de equivalencia en A cuya partición coincide con $\{p_j\}$.

Demostración:

Definimos la relación binaria en A por la correspondencia $f = (R; A, A)$ en donde se verifica que el grafo es $R = \{(x, y) / \exists p_k \in \{p_j\} \wedge (x, y \in p_k)\}$. Veamos que se trata de una relación de equivalencia:

a) Es reflexiva: $\forall x \in A, \exists p_k \in \{p_j\} / x \in p_k \rightarrow xRx$

b) Es simétrica: $xRy \rightarrow \exists p_k \in \{p_j\} / x, y \in p_k \rightarrow yRx$

c) Es transitiva:

$$\left. \begin{array}{l} xRy \rightarrow \exists p_k \in \{p_j\} / x, y \in p_k \\ yRz \rightarrow \exists p_h \in \{p_j\} / y, z \in p_h \end{array} \right\} \rightarrow y \in p_k \cap p_h \rightarrow y \in p_k \cap p_h \wedge \{p_j\} \text{particion} \rightarrow \\ \rightarrow p_k = p_h \leftrightarrow x, z \in p_k \rightarrow xRz$$

Comprobemos ahora que la partición inducida en A por la relación de equivalencia R coincide con la partición dada:

Sea $[x] = \{y / xRy\}$ y sea $p_k \in \{p_j\} / x \in p_k$

$$\left. \begin{array}{l} \forall z \in [x] \rightarrow zRx \rightarrow z, x \in p_k \rightarrow z \in p_k \rightarrow [x] \subseteq p_k \\ \forall z \in p_k \rightarrow z, x \in p_k xRz \rightarrow z \in [x] \rightarrow p_k \subseteq [x] \end{array} \right\} \rightarrow [x] = p_k$$
Definición 4.1.3:

Se llama conjunto cociente de la relación de equivalencia R en el conjunto A al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia de R en A .

Conjunto cociente: $Conj\ Coc = A / R$

4.2. Las Relaciones de Orden**Definición 4.2.1:**

Una relación R en un conjunto A se dice que es *de orden* si es reflexiva, simétrica y transitiva.

$$R = (R; A, A) \text{ de orden} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, xRx \\ \forall x, y \in A, xRy \wedge yRx \rightarrow x = y \\ \forall x, y, z \in A, xRy \wedge yRz \rightarrow xRz \end{cases}$$

Una relación de orden R en un conjunto A se dirá *de orden total* si dos elementos cualesquiera de A están relacionados por R .

$$R = (R; A, A) \text{ de orden total} \Leftrightarrow \forall x, y \in A, xRy \vee yRx$$

Se llama *primer elemento* de un conjunto A ordenado por una relación de orden R a un elemento de A que se relaciona con todos los elementos de A .

$$R = (R; A, A) \text{ de orden, } a \in A \text{ primer elemento} \Leftrightarrow aRx / \forall x \in A$$

Un conjunto A ordenado por la relación de orden R se dice que está *bien ordenado* si todo subconjunto M de A admite un primer elemento.

$$A \text{ bien ordenado por } R = (R; A, A) \Leftrightarrow \forall M \subseteq A, \exists m \in M / mRx, \forall x \in M$$

Teorema 4.2.1:

Todo conjunto bien ordenado está totalmente ordenado.

Demostración:

Sea A bien ordenado por la relación de orden R . Cualquier subconjunto de A tiene un primer elemento. Si consideramos los subconjuntos de A que tienen solamente dos elementos $\{x, y\}$, es claro que uno de ellos es el primero elemento, x o y . Esto es, xRy o bien yRx . En definitiva:

$$\forall x, y \in A, xRy \vee yRx \Rightarrow A \text{ totalmente ordenado}$$

Teorema 4.2.2:

Todo subconjunto de un conjunto bien ordenado está bien ordenado.

Demostración:

Sea A un conjunto bien ordenado por la relación de orden R , y sea A_0 un subconjunto de A . Si M es subconjunto de A_0 también será M subconjunto de A , y por estar A bien ordenado, M tendrá un primer elemento, luego A_0 también está bien ordenado.

5. Aplicaciones

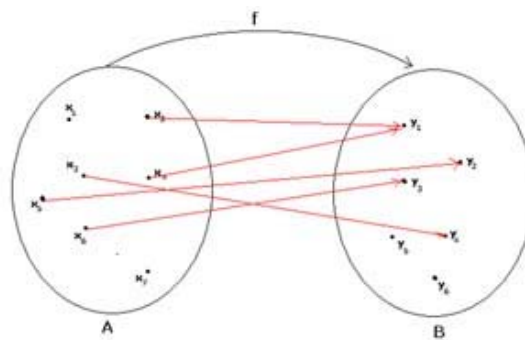
Definición 5.1:

Una correspondencia $f = (G_f; A, B)$ se denomina *aplicación* si es unívoca y el conjunto inicial A coincide con el conjunto de definición de la correspondencia.

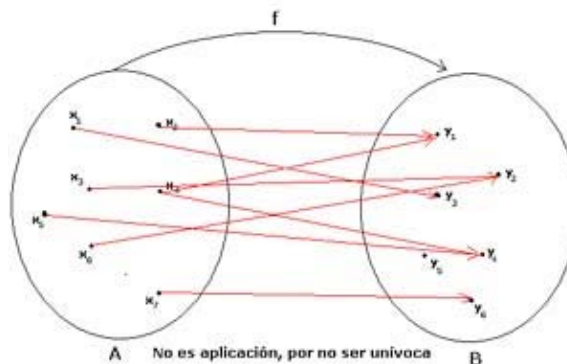
$$f = (G_f; A, B) \text{ aplicación} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \wedge y' = f(x) \rightarrow y = y' \\ A = \text{orif} = \text{pr}_1 G \end{cases}$$

Sea la aplicación $f = (G_f; A, B)$. Diremos:

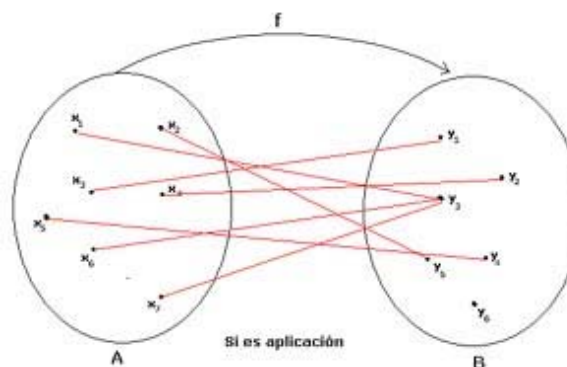
- f es aplicación *inyectiva* $\Leftrightarrow (\forall x \in A, f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y \rightarrow x_1 = x_2)$
- f es aplicación *suprayectiva* (o *sobreyectiva*) $\Leftrightarrow (\text{im}f = B)$
- f es aplicación *biyectiva* $\Leftrightarrow f$ inyectiva $\wedge f$ suprayectiva \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow (\forall x \in A, f(x_1) = y \wedge f(x_2) = y \rightarrow x_1 = x_2) \wedge (\text{im}f = B)$



No es aplicación porque $\text{pr}_1 G_f \neq A$



No es aplicación, por no ser unívoca



Si es aplicación

Definición 5.2:

Sean $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; C, D)$ dos aplicaciones tales que $G_f \subseteq G_g$, es decir, tales que $A = pr_1 G_f \subseteq pr_1 G_g$, y además g coincide con f en A y es $B \subseteq D$. Se dice entonces que g es una prolongación de f en C , o bien, que f es una restricción de g en A . Se simboliza por $f = g|_A$

5.1. Composición de aplicaciones**Teorema 5.1.1:**

Sean $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; B, C)$ aplicaciones. Entonces, la correspondencia $g \circ f = (G_g \circ G_f; A, C)$ es también una aplicación.

Demostración:

Veamos que se cumplen las dos condiciones:

a) $G_g \circ G_f$ es unívoco:

Sean (x, y) y (x, y') pertenecientes a este grafo. Veamos que deben coincidir:

$$(x, y) \in G_g \circ G_f, \exists z \in B / (x, z) \in G_f \wedge (z, y) \in G_g$$

$$(x, y') \in G_g \circ G_f, \exists z' \in B / (x, z') \in G_f \wedge (z', y') \in G_g$$

Como G_f es grafo unívoco: $(x, z) \in G_f \wedge (x, z') \in G_f \rightarrow z = z'$

Y como también G_g es grafo unívoco: $(z, y) \in G_g \wedge (z', y') \in G_g \rightarrow (z, y) \in G_g \wedge (z, y') \in G_g \rightarrow y = y'$

En definitiva: $(f \circ g)(x) = y \wedge (f \circ g)(x) = y' \rightarrow y = y'$

b) El conjunto inicial coincide con A:

Veamos que $A = pr_1(G_g \circ G_f)$

$$pr_1(G_g \circ G_f) = f^{-1}(pr_1 G_g) = f^{-1}(B) = A$$

Teorema 5.1.2:

Si $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; B, C)$ son aplicaciones inyectivas, entonces la composición $f \circ g$ también lo es.

Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} (x, y) \in G_g \circ G_f \rightarrow (\exists z \in B / (x, z) \in G_f \wedge (z, y) \in G_g) \\ (x', y) \in G_g \circ G_f \rightarrow (\exists z' \in B / (x', z') \in G_f \wedge (z', y) \in G_g) \end{array} \right\} \rightarrow (G_g \text{ inyectivo} \wedge$$

$$\wedge (z, y) \in G_g \wedge (z', y) \in G_g \rightarrow z = z') \rightarrow (G_f \text{ inyectivo} \wedge (x, z) \in G_g \wedge (x', z) \in G_g \rightarrow x = x').$$

En definitiva: $(x, y) \in G_g \circ G_f \wedge (x', y) \in G_g \circ G_f \rightarrow x = x' \rightarrow g \circ f$ inyectiva

Teorema 5.1.3:

Si $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; B, C)$ son aplicaciones suprayectivas, entonces la composición $f \circ g$ también lo es.

Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ suprayec} \rightarrow \text{im } f = f(A) = B \\ g \text{ suprayec} \rightarrow \text{im } g = g(B) = C \end{array} \right\} \rightarrow \text{im } (g \circ f) = (g \circ f)(A) = g[f(A)] = g(B) = C$$

$$\text{O sea: } \text{im } (g \circ f) = (g \circ f)(A) = C \rightarrow (g \circ f) \text{ suprayec}$$

Teorema 5.1.4:

Sean las aplicaciones $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; B, C)$, ambas biyectivas. Se verifica entonces que $g \circ f = (G_g \circ G_f; A, C)$ es aplicación biyectiva.

Demostración:

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ biyectiva} \rightarrow f \text{ inyectiva} \wedge f \text{ suprayectiva} \\ g \text{ biyectiva} \rightarrow g \text{ inyectiva} \wedge g \text{ suprayectiva} \end{array} \right\} \rightarrow g \circ f \text{ inyectiva} \wedge$$

$$\wedge g \circ f \text{ suprayectiva} \rightarrow g \circ f \text{ biyectiva}$$

Teorema 5.1.5:

Sean las aplicaciones $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; B, C)$. Si la aplicación compuesta, $g \circ f = (G_g \circ G_f; A, C)$, es inyectiva, entonces f es inyectiva.

Demostración:

Probaremos el contrarrecíproco:

$$\text{Si } f \text{ no es inyectiva} \rightarrow \exists x, x' \in A, \exists y \in B / x \neq x' \wedge (x, y), (x', y) \in G_f$$

$$\text{Por ser } g \text{ aplicación} \rightarrow \exists x \in C / (y, z) \in G_g \rightarrow (x, z) \in G_g \circ G_f \wedge (x', z) \in G_g \circ G_f \wedge$$

$$\wedge x \neq x' \rightarrow g \circ f \text{ no inyectiva}$$

Teorema 5.1.6:

Sean las aplicaciones $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; B, C)$. Si la aplicación compuesta, $g \circ f = (G_g \circ G_f; A, C)$, es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.

Demostración:

Probaremos también aquí el teorema contrarrecíproco:

$$g \text{ no suprayectiva} \rightarrow \text{im } g = g(B) \neq C \rightarrow \text{im } (g \circ f) = (g \circ f)(A) = g[f(A)] \neq C \rightarrow$$

$$\rightarrow g \circ f \text{ no suprayectiva.}$$

Teorema 5.1.7:

Toda aplicación, $f = (G_f; A, B)$, induce en A una partición o clasificación y, por consiguiente, induce una relación de equivalencia en A .

Demostración:

Definiremos una relación R en A usando la aplicación, para ver luego que R es una relación de equivalencia:

$$x, y \in A, xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

(dos elementos de A están relacionados por R si tienen la misma imagen por la aplicación f)

Veamos que es de equivalencia:

a) Es reflexiva: $\forall x \in A, f(x) \equiv f(x) \rightarrow xRx$

b) Es simétrica: $\forall x, y \in A / xRy \rightarrow f(x) = f(y) \rightarrow f(y) = f(x) \rightarrow yRx$

c) Es transitiva: $\forall x, y, z \in A / xRy \wedge yRz \rightarrow f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \rightarrow$
 $\rightarrow f(x) = f(z) \rightarrow xRz$

Teorema 5.1.8:

Dada una aplicación, $f = (G_f; A, B)$, existen siempre dos aplicaciones, $I_A = (G_{I_A}; A, A)$ y $I_B = (G_{I_B}; B, B)$, tales que verifican: $f \circ I_A = f \wedge I_B \circ f = f$.

Demostración:

I_A, I_B son aplicaciones identidad en A, B , respectivamente.

$$\forall x \in A, (f \circ I_A)(x) = f[I_A(x)] = f(x) \rightarrow f \circ I_A = f$$

$$\forall x \in A, (I_B \circ f)(x) = I_B[f(x)] = f(x) \rightarrow I_B \circ f = f$$

Teorema 5.1.9:

La composición de aplicaciones es asociativa.

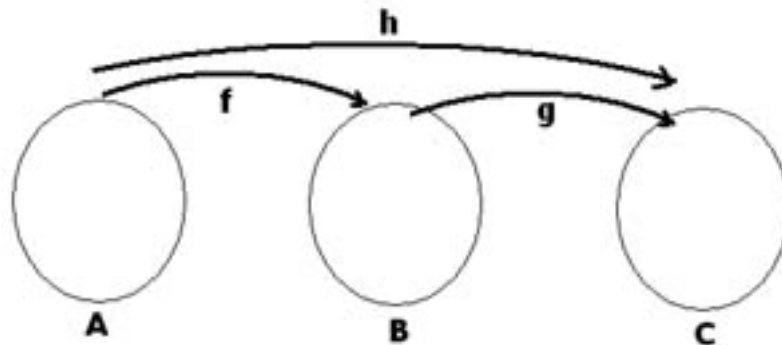
Demostración:

Trivial, por la asociatividad de los grafos.

5.2. Teoremas de caracterización de aplicaciones

Teorema 5.2.1: (Caracterización de aplicaciones)

Dadas las aplicaciones $f = (G_f; A, B)$ y $h = (G_h; A, C)$, se verifica que la condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación $g = (G_g; B, C)$ tal que $h = g \circ f$ es que se cumpla que $\forall x, x' \in A, f(x) = f(x') \rightarrow h(x) = h(x')$.



Demostración:

a) Veamos que es condición necesaria, esto es, que si existe la aplicación g , entonces se cumple la implicación:

$$\left. \begin{aligned} \forall x_1 \in A, h(x_1) &= (g \circ f)(x_1) = g[f(x_1)] \\ \forall x_2 \in A, h(x_2) &= (g \circ f)(x_2) = g[f(x_2)] \end{aligned} \right\} \wedge f(x_1) = f(x_2) \rightarrow g[f(x_1)] = g[f(x_2)] \rightarrow$$

$$\rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \rightarrow h(x_1) = h(x_2)$$

Veamos ahora que también es condición suficiente, es decir, que si se cumple esta implicación existe la aplicación g tal que $g \circ f = h$. Primero haremos la prueba para el caso de que f sea suprayectiva y después para el caso general:

b.1) Si f es sobreyectiva, se cumple que $f(A) = B$. O sea:

$$\forall y \in B, \exists x \in A / (x, y) \in G_f \wedge (x, z) \in G_h$$

Consideremos el grafo $G_g = \{(y, z) / (\exists x)(x, y) \in G_f \wedge (x, z) \in G_h\}$ que definiría la correspondencia $g = (G_g; B, C)$ tal que $g \circ f = h$ y veamos que tal grafo es unívoco, es decir, veamos que se cumple que $(y, z_1), (y, z_2) \in G_g \rightarrow z_1 = z_2$:

$$\begin{aligned} & \forall (y, z_1), (y, z_2) \in G_g, (\exists x_1)(\exists x_2)[(x_1, y), (x_2, y) \in G_f \wedge (x_1, z_1), (x_2, z_2) \in G_h] \rightarrow \\ & \rightarrow f(x_1) = y = f(x_2) \wedge h(x_1) = z_1 \wedge h(x_2) = z_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2) \wedge \\ & \wedge h(x_1) = z_1 \wedge h(x_2) = z_2 \rightarrow h(x_1) = h(x_2) \rightarrow z_1 = z_2 \end{aligned}$$

La correspondencia g así definida verifica por la construcción de su grafo que $h = g \circ f$

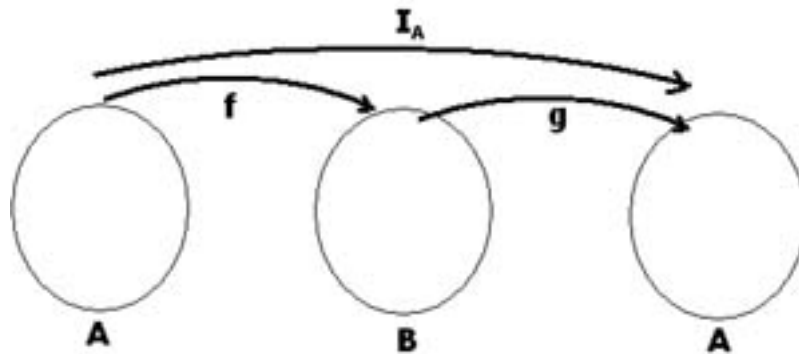
b2) Sea ahora el caso general, o sea que $f(A) = B' \subseteq B$ y consideremos la aplicación $f' = (G_f; A, B')$, es decir, tal que $f'(x) = f(x), \forall x \in A$.

Si consideramos los conjuntos A, B', C y repetimos el proceso del apartado anterior con el grafo $G_{g'} = \{(y, z) / (\exists x)(x, y) \in G_f \wedge (x, z) \in G_h\}$ encontramos que $g' = (G_{g'}; B', C)$ es una aplicación que cumple que $h = g' \circ f'$.

Finalmente, prolongamos g' en la aplicación $g = (G_g; B, C)$, cumpliéndose que $h(x) = g'[f'(x)] = g'[f(x)] = g[f(x)]$, de donde $h = g \circ f$.

Teorema 5.2.2: (Caracterización de aplicaciones inyectivas)

Sea la aplicación $f = (G_f; A, B)$. La condición necesaria y suficiente para que f sea inyectiva es que exista una aplicación $g = (G_g; B, A)$ tal que $g \circ f = I_A$, donde es $I_A = (G_{I_A}; A, A)$, $G_{I_A} = \{(x, x) / x \in A\}$ (identidad en A).



Demostración:

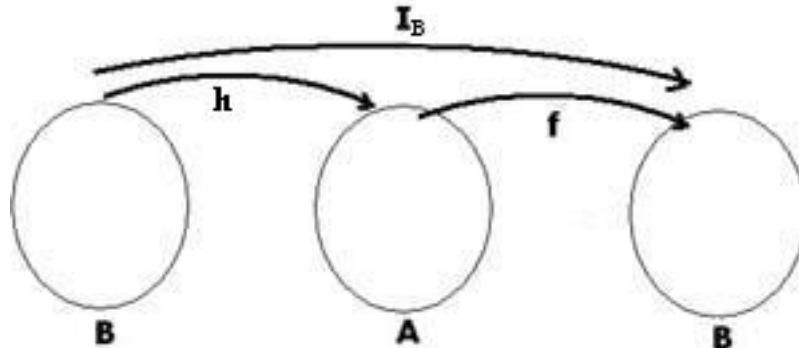
Basta aplicar el teorema anterior, haciendo $C=A$ y $h=I_A$, pues dadas las aplicaciones $f = (G_f; A, B)$, $I_A = (G_{I_A}; A, A)$ la condición necesaria y suficiente para que exista la aplicación $g = (G_g; B, A)$ tal que $g \circ f = I_A$ es que:

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \rightarrow I_A(x_1) = I_A(x_2), \text{ es decir:}$$

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow f \text{ inyectiva}$$

Teorema 5.2.3: (Caracterización de aplicaciones suprayectivas)

La condición necesaria y suficiente para que la aplicación $f = (G_f; A, B)$ sea sobreyectiva es que exista una aplicación $h = (G_h; B, A)$ tal que $f \circ h = I_B$, donde es $I_B = (G_{I_B}; B, B)$, $G_{I_B} = \{(y, y) / y \in B\}$ (identidad en B).



Demostración:

a) Veamos que es condición suficiente:

$$\forall y \in B, (f \circ h)(y) = f[h(y)] = I_B(y) \wedge h(y) \in A \rightarrow \exists x \in A, x = h(y) \rightarrow$$

$$\rightarrow f(x) = f[h(y)] = (f \circ h)(y) = I_B(y) = y$$

En definitiva: $\forall y \in B, \exists x \in A / f(x) = y \rightarrow f$ sobreyectiva

b) Veamos ahora que también es condición necesaria:

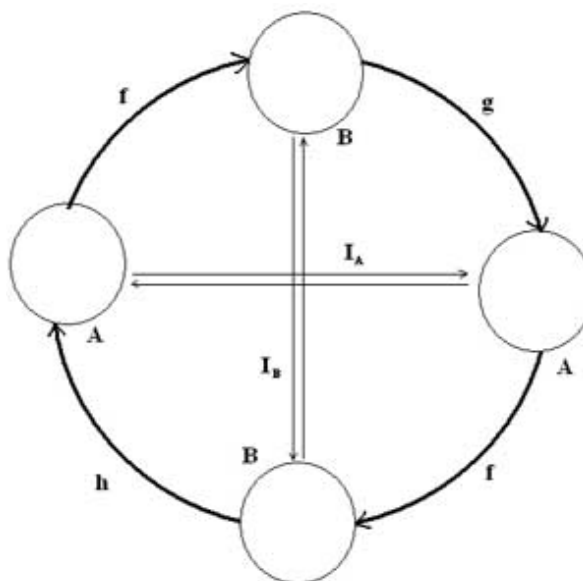
$$f \text{ sobreyectiva} \rightarrow \forall y \in B, x \in A / f(x) = y \rightarrow M_y = \{x \in A / f(x) = y\} \neq \emptyset \rightarrow$$

$$\rightarrow \forall h(y) \in M_y, \exists h = (G_h; B, A) / G_h = (y, h(y)) \rightarrow f(h(y)) = (f \circ g)(y) = y \rightarrow$$

$$\rightarrow f \circ g = I_B$$

Teorema 5.2.4: (Caracterización de aplicaciones biyectivas)

La condición necesaria y suficiente para que la aplicación $f = (G_f; A, B)$ sea biyectiva es que existan aplicaciones $g = (G_g; B, A)$ y $h = (G_h; B, A)$ tales que verifiquen $g \circ f = I_A \wedge f \circ h = I_B$. Además, ambas aplicaciones son únicas, por lo que $g=h$.



Demostración:

Por el teorema 5.2.2 $\rightarrow f$ inyectiva, ya que existen aplicaciones h y g tales que $h \circ f = I_A, g \circ f = I_A$

Por el teorema 5.2.3 $\rightarrow f$ sobreyectiva, ya que existen aplicaciones h y g tales que $f \circ h = I_B, f \circ g = I_B$

Por consiguiente, la aplicación f es inyectiva y también sobreyectiva, es decir, se trata de una aplicación biyectiva.

Veamos ahora que las aplicaciones h y g han de coincidir:

Por la propiedad asociativa $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) \rightarrow I_A \circ h = g \circ I_B \rightarrow h = g$

En definitiva:

$$f \text{ biyectiva} \leftrightarrow \exists g = (G_f; B, A) / g \circ f = I_A \wedge f \circ g = I_B$$

La aplicación $g = h$ que verifica esta condición se acostumbra a denominar aplicación *recíproca* o *inversa* de la aplicación f . Precisamos esto en la siguiente definición.

Definición 5.2.1: (Aplicaciones recíprocas)

Se denomina *aplicación recíproca* o *aplicación inversa* de la aplicación $f = (G_f; A, B)$ a la aplicación $g = (G_g; B, A)$ tal que $f \circ g = I_B$ y $g \circ f = I_A$.

Puesto que tal aplicación es única para cada aplicación f , por el anterior teorema 5.2.4, podemos representarla por f^{-1} , por lo que la definición puede quedar de esta forma:

$$f^{-1} \text{ aplicación inversa de } f \Leftrightarrow f \circ f^{-1} = I_B \wedge f^{-1} \circ f = I_A$$

Obviamente, a la vista del teorema 5.2.4., puede decirse que la condición necesaria y suficiente para que la aplicación f sea biyectiva es que exista la aplicación inversa o recíproca.

Teorema 5.2.5:

Sean las aplicaciones biyectivas $f = (G_f; A, B)$ y $g = (G_g; B, C)$. Se verifican las siguientes igualdades:

- a) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- b) $(f^{-1})^{-1} = f$

Demostración:

a) Bastará componer la aplicación $f^{-1} \circ g^{-1}$ con $g \circ f$ y tener en cuenta la asociatividad de la composición de aplicaciones:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ I_B \circ f = f^{-1} \circ f = I_A \Rightarrow f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$$

b) Puesto que una aplicación compuesta con su recíproca ha de ser la aplicación identidad. Si componemos f^{-1} con f , resulta $f^{-1} \circ f = I_A$ de lo cual deducimos que f es la aplicación inversa de f^{-1} : $f = (f^{-1})^{-1}$.

5.3. Factorización canónica de las aplicaciones

Definición 5.3.1:

Si A es un conjunto dotado de una relación de equivalencia R , de la cual es A/R su conjunto cociente, se denomina *aplicación canónica* referida a R a la aplicación $n_R = (G_{n_R}; A, A/R)$, es decir, la aplicación cuyo grafo está formado por los pares constituidos por cada elemento x de A y la clase de equivalencia $[x]$ a la que pertenece: $G_{n_R} = \{(x, [x]) / x \in A\}$.

Obviamente, la aplicación canónica así definida es siempre sobreyectiva, pues $\forall [x] \in A/R, \exists x \in A / n_R(x) = [x]$

Teorema 5.3.1:

Sea la aplicación $f = (G_f; A, B)$, y sea R la relación de equivalencia inducida en A por f , o sea, $xRy \leftrightarrow f(x) = f(y)$, y sea $n = (G_n; A, A/R)$ la correspondiente aplicación canónica. Se verifica que:

a) Existen las aplicaciones

a1) $\varphi = (G_\varphi; A/R, f(A))$, con $G_\varphi = \{([x], f(x)) / x \in A\}$, biyectiva.

a2) $j = (G_j; f(A), B)$, con $G_j = \{(f(x), f(x)) / x \in A\}$, inyectiva.

b) $f = j \circ \varphi \circ n$

Demostración:

a)

a1) Veamos que φ es aplicación biyectiva:

a1.1) $\text{Pr}_1 G_\varphi = \{[x] / x \in A\} = A/R$

a1.2) $\forall ([x], f(x)), ([y], f(y)) \in G_\varphi / [x] = [y] \rightarrow xRy \rightarrow f(x) = f(y) \rightarrow \text{univoco}$

a1.3) $\text{Pr}_2 G_\varphi = \{f(x) / x \in A\} = f(A) \rightarrow \text{sobreyectiva}$

a1.4) $\forall ([x], f(x)), ([y], f(y)) \in G_\varphi / f(x) = f(y) \rightarrow xRy \rightarrow [x] = [y] \rightarrow \text{inyectiva}$

a2) Veamos que j es aplicación inyectiva:

a2.1) $\text{Pr}_1 G_j = \{f(x) / x \in A\} = f(A)$

a2.2) $\forall (f(x), f(x)), (f(y), f(y)) \in G_j / f(x) = f(y) \rightarrow f(x) = f(y) \rightarrow$
 $\rightarrow \text{univoco e inyectivo}$

b) veamos que $f = j \circ \varphi \circ n$:

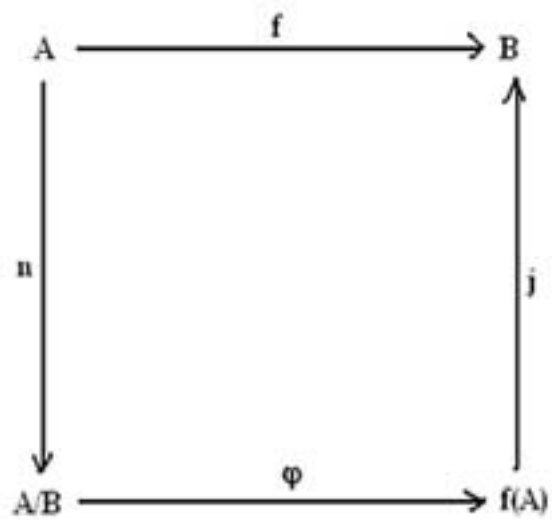
$\forall x \in A, (j \circ \varphi \circ n)(x) = (j \circ \varphi)[n(x)] = (j \circ \varphi)([x]) = j[\varphi([x])] = j[f(x)] = f(x)$

Por tanto: $\forall x \in A, f(x) = (j \circ \varphi \circ n)(x)$

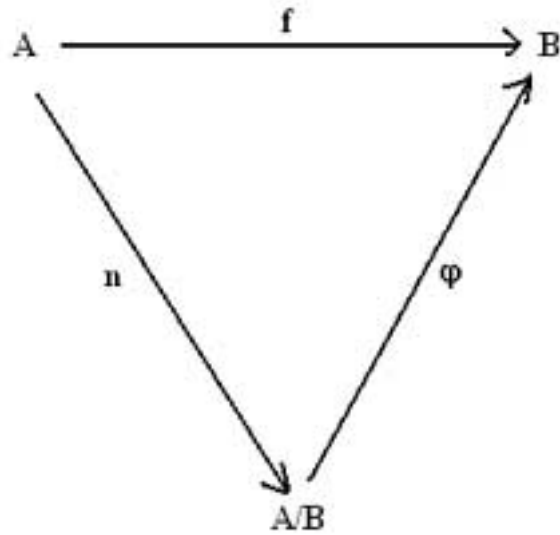
En definitiva, toda aplicación puede ser descompuesta en una composición de tres aplicaciones, una aplicación canónica que es suprayectiva, una aplicación biyectiva y una aplicación inyectiva.

Si la aplicación dada fuera suprayectiva, entonces bastaría la descomposición en una aplicación canónica, suprayectiva, y una aplicación biyectiva.

Se tienen, en definitiva, los gráficos:



Si f es suprayectiva:



6. Bibliografía

Halmos, Paul R., Teoría intuitiva de conjuntos.
CECSA, México, 1976

Zarisky, O.; Samuel, P., Conmutativa Álgebra.
Springer, N.York, 1991

Godement, R., Álgebra.
Tecnos, Madrid, 1978