

LA DINÁMICA DEL CAOS

Joaquín González Álvarez

La Dinámica, como es sabido, es la parte de la Física que estudia el movimiento. Por sistemas dinámicos entenderemos en este trabajo, los sistemas físicos, químicos, biológicos y sociales, cuyas propiedades varían con el tiempo y por lo general los estudiaremos mediante sistemas de ecuaciones diferenciales del tipo:

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x,y,z) \\ dy/dt &= g(x,y,z) \\ dz/dt &= h(x,y,z) \end{aligned} \quad (1)$$

a los cuales llamaremos por brevedad, sistemas dinámicos.

Para el tratamiento del caos en el contexto de la Teoría del Caos, los sistemas dinámicos serán no lineales.

El climatólogo norteamericano Edward Lorenz desarrolló la Teoría del Caos como hoy la conocemos, motivado por advertir que cuando por medio de sistemas de ecuaciones diferenciales semejantes a (1), intentaba establecer pronósticos de condiciones climáticas, partiendo de determinadas condiciones iniciales, los resultados variaban notablemente con sólo variar ligeramente los valores iniciales de las variables. Se le ha llamado caos a la situación que presenta un sistema dinámico cuando por ligeros cambios en las condiciones iniciales, a partir de ciertos valores de las variables, éstos cambian considerablemente sin presentar ni periodicidad ni aparente orden

Lorenz modeló matemáticamente la dinámica del caos mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} dx/dt &= \sigma(y-x) \\ dy/dt &= rx-y-xz \\ dz/dt &= xy-bz \end{aligned} \quad (2)$$

La no linealidad la advertimos en los términos xz y xy . σ es el número de Prandtl. R número de Rayleigh y b una constante sin nombre.

La resolución de sistemas como (1) y (2), a veces no posible por los métodos generales lo que hace recurrir a métodos numéricos y gráficos, conduce a la posibilidad de determinar en el espacio físico de las x, y, z o análogas, trayectorias físicas, conformando un retrato físico del sistema, cada uno de cuyos puntos representan un estado del mismo. El flujo de trayectorias físicas, remeda el de un fluido. Los puntos donde eventualmente convergen las trayectorias físicas se denominan puntos fijos estables o atractores y constituyen estados estacionarios para los cuales los primeros

miembros de (1) y (2) se hacen cero. También son iguales a cero los primeros miembros de (1) y (2), para los puntos fijos inestables, esto es, de donde salen trayectorias fásicas, los cuales se denominan focos. En algunos casos las trayectorias que salen de los focos se enrollan en órbitas cerradas las cuales pueden constituir ciclos límites característicos de los procesos oscilatorios.

El sistema de Lorenz (2) es disipativo con lo que el volumen fásico se contrae con el flujo como mostramos a continuación. Consideremos el volumen fásico V contenido en una superficie cerrada que pasa a ser en un tiempo infinitesimal dt , V' . La variación de volumen la calculamos tomando una porción de volumen en la superficie en forma de paralelepípedo infinitesimal de base dA y espesor $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt$ donde \mathbf{f} velocidad instantánea ($i dx/dt + j dy/dt + k dz/dt$) y \mathbf{n} vector unitario normal a la superficie, de modo que la variación de volumen será:

$$V' - V = \int (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dt dA$$

y por tanto

$$dV/dt = (V' - V)/dt = \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA \quad (3)$$

y por el teorema de la divergencia.

$$dV/dt = \int \nabla \cdot \mathbf{f} dV$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = -\sigma - 1 - b = C < 0 \quad (4)$$

donde C constante, se tendrá por (3) y (4):

$$V = D e^{-Ct}$$

Con D constante, igualdad que nos dice que el volumen se contrae exponencialmente, tendiendo a cero para t tendiendo a infinito, de acuerdo al carácter disipativo del sistema (2) de Lorenz.

Si en el proceso descrito se parte de cierto volumen de condiciones iniciales, eventualmente éste se contraerá en un conjunto límite, por lo antes explicado, tendiendo a cero. Todas las trayectorias que partan del volumen inicial terminan en dicho conjunto límite, el cual consistirá de puntos fijos, ciclos límites o en lo que como veremos mas adelante, se denomina atractor extraño, característico del caos.

Mediante el sistema (2) de Lorenz, se muestra que para un valor $r = (\sigma(\sigma + b + 3))/(\sigma - b - 1)$ con $\sigma - b - 1 > 0$, ocurre una bifurcación, esto es, puntos fijos que pierden estabilidad. Lorenz mostró que para $\sigma = 10$, $b = 8/3$ y $r = 28$, o sea para un valor de r justo por encima del valor de bifurcación como puede comprobarse por la igualdad última, las trayectorias muestran una fascinante estructura en el espacio de fases, que responde a la solución del sistema y el ploteo a partir de la condición inicial $(0, 1, 0)$. Se ha llegado a la condición de caos. La forma tridimensional que aparece es un atractor extraño, configuración a la que antes nos referimos, y que como entonces demostramos se confina en un conjunto limitado cuyo volumen tiende a cero. Proyectada la figura en el plano xz , se observa la trayectoria que partiendo del origen describe un número indeterminado de espirales a un lado del gráfico, para pasar al otro lado describiendo



Diagrama de la trayectoria del sistema de Lorenz para los valores $r=28$, $\sigma=10$, $b=8/3$. Imagen de Wikipedia.

espirales en parecida forma, pasos que ejecuta alternativamente, caóticamente, semejando el conjunto las alas de una mariposa. (Advertimos que no es a esto a lo que se refiere la célebre metáfora del caos: "el aleteo de una mariposa en San Francisco es capaz de provocar un huracán en Beiguin"). Es engañosa la aparente unión de las alas de la mariposa sobre el eje z , del Atractor Extraño de Lorenz. En realidad las espiras están en planos distintos sumamente cercanos, adoptando una regularidad fractal. La regularidad aproximada del Fractal de Cantor, el cual se obtiene a partir de un segmento de recta que se divide en tres partes iguales, se suprime la del medio y este proceso se repite en cada porción que se obtiene, una y otra vez llegándose a segmentos tan pequeños que prácticamente son puntos. Los cortes de las espiras por un plano, conforman en

el mismo un fractal de Cantor aproximadamente. Notamos así un cierto orden en el caos.

Hemos dado una idea de lo fundamental de la dinámica del caos tal como se entiende en la llamada Teoría del Caos, la cual como aspecto de la Teoría de la Complejidad, constituye uno de los paradigmas de la ciencia de nuestros tiempos.

Bibliografía

- Gleick, J. 1987. Chaos. Penguin Books. New York.
Peitgen-Jurgens-Saupe, 2004. Chaos and Fractals. Springer. New York.
Strogatz, S. 2000. Non Linear Dynamics and Chaos. Perseus Books Group. Cambridge.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com