INTRODUCCIÓN DE LOS NÚMEROS NATURALES MEDIANTE LOS AXIOMAS DE PEANO

El conjunto N de los números naturales puede ser introducido de forma natural como el conjunto de los cardinales de los conjuntos entre sí coordinables, en el sentido de Dedekind:

$$0 = card(\phi),\ \ 1 = card(\{\phi\}),\ \ 2 = card(\{\phi, \{\phi\}\}),\ \ ...$$

sin embargo, resulta equivalente introducirlos desde el punto de vista de un lenguaje formalizado, desde la lógica matemática, mediante un conjunto de axiomas o condiciones postuladas. En 1989 Giusepe Peano propuso un conjunto de nueve axiomas (que después de algunas correcciones quedarían en solo cinco) con los cuales es posible deducir en N tanto las propiedades de las operaciones internas de suma y multiplicación como su orden total.

En la presentación que sigue exponemos los cinco postulados de Peano y la derivación de las propiedades básicas para la suma y la multiplicación en N, así como su ordenación.

1. Los axiomas de Peano:

Se define el conjunto N de los números naturales como un conjunto que verifica las cinco condiciones siguientes:

1) Existe un elemento de N al que llamaremos cero (0), esto es,

$$0 \in N$$

2) Existe la llamada *aplicación siguiente* $\varphi : N \to N$:

$$\varphi : N \to N, \quad \forall n \in N, \varphi(n) \in N$$

3) El cero no es imagen por la aplicación siguiente:

$$\forall n \in N, \varphi(n) \neq 0$$

4) La aplicación siguiente es inyectiva:

$$n, m \in NxN, \varphi(n) = \varphi(m) \to n = m$$

5) Se verifica la inducción completa:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ 0 \in \mathrm{A} \\ 2) \forall n \in \mathrm{A} \to \varphi(n) \in A \end{array}\right\} \Rightarrow A = N$$

Resumiendo lo que afirman estos postulados o axiomas, podemos entender que se trata de un conjunto que tiene un elemento, el cero (Ax.1), que no es siguiente de ningún otro (Ax. 3), es decir, se trata del primer elemento del conjunto, y todos los demás elementos tienen cada uno un elemento siguiente (Ax. 2), de modo que dos elementos distintos tienen siguientes distintos (Ax.4). El quinto postulado es de suma importancia por dotarnos de un método de demostración de propiedades, ya que nos indica que todo conjunto A al que pertenezca el cero, y tal que todo elemento de A tiene siguiente en A, necesariamente ha de coincidir con el conjunto N de los números naturales. Es lo que se acostumbra a denominar método simple de inducción completa.

A partir de estas cinco condiciones, y usando sistemáticamente el quinto axioma, de la inducción completa, podemos probar todas las propiedades del conjunto N.

Teorema 1.1:
Ningún número natural coincide con su siguiente, $\forall n \in N,\ n \neq \varphi(n).$

Demostración:
Sea $\mathrm{A} = \{n \in N / n \neq \varphi(n)\}$. Veamos que tal conjunto coincide con N.

1) $0 \in \mathrm{A}$, pues, por Ax. 3, $0 \neq \varphi(0)$

2) $\forall n \in \mathrm{A},\ n \neq \varphi(n) \rightarrow \varphi(n) \neq \varphi(\varphi(n))$, por Ax. 4. Luego $\varphi(n) \in \mathrm{A}$

En definitiva, vemos que $1)\ 0 \in \mathrm{A},\ \ 2)\ n \in \mathrm{A} \rightarrow \varphi(n) \in \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} = N$, por Ax.5.

Luego, en todo N se verifica que ningún número natural coincide con su siguiente.

Teorema 1.2:
Si dos aplicaciones de N en N conmutan con la aplicación siguiente y tienen la misma imagen para el cero, entonces ambas coinciden. Es decir:

$$f, g \in Ap(N) / \left.\begin{matrix} f \circ \varphi = \varphi \circ f \\ g \circ \varphi = \varphi \circ g \end{matrix}\right\} \wedge f(0) = g(0) \Rightarrow f(n) = g(n), \forall n \in N$$

donde hemos llamado $Ap(N)$ al conjunto de las aplicaciones de N en N.

Demostración:
Sea $\mathrm{A} = \{n \in N / f(n) = g(n)\}$. Veamos que tal conjunto coincide con N.

1) $0 \in \mathrm{A},$ pues por hipótesis del teorema, $f(0) = g(0).$

2) $\forall n \in \mathrm{A},\ f(n) = g(n) \rightarrow \varphi[f(n)] = \varphi[g(n)] \rightarrow (\varphi \circ f)(n) = (\varphi \circ g)(n) \rightarrow$
$\rightarrow (f \circ \varphi)(n) = (g \circ \varphi)(n) \rightarrow f[\varphi(n)] = g[\varphi(n)] \rightarrow \varphi(n) \in \mathrm{A}$

En definitiva, vemos que $1)\ 0 \in \mathrm{A},\ \ 2)\ n \in \mathrm{A} \rightarrow \varphi(n) \in \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} = N$, por Ax.5.

Luego, se verifica que $f(n) = g(n), \forall n \in N$.

Teorema 1.3:
Si dos aplicaciones de N en N, $f, g \in Ap(N)$, tienen la misma imagen para el cero y existe alguna aplicación ρ de N en N tal que $f \circ \varphi = \rho \circ f,\ \ g \circ \varphi = \rho \circ g$, entonces ambas aplicaciones coinciden, esto es, $f(n) = g(n), \forall n \in N$

Demostración:
Sea $\mathrm{A} = \{n \in N / f(n) = g(n)\}$. Veamos que tal conjunto coincide con N.

1) $0 \in \mathrm{A},$ pues por hipótesis del teorema, $f(0) = g(0).$

2) $\forall n \in \mathrm{A},\ (f \circ \varphi)(n) = (\rho \circ f)(n) \rightarrow f[\varphi(n)] = \rho[f(n)] = \rho[g(n)] = (\rho \circ g)(n) =$
$= (g \circ \varphi)(n) = g[\varphi(n)] \rightarrow \forall n \in \mathrm{A},\ f[\varphi(n)] = g[\varphi(n)] \rightarrow \varphi(n) \in \mathrm{A}$

En definitiva, vemos que $1)\ 0 \in \mathrm{A},\ \ 2)\ n \in \mathrm{A} \rightarrow \varphi(n) \in \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} = N$, por Ax.5.

Luego, se verifica que $f(n) = g(n), \forall n \in N$.

2. La suma o adición de números naturales:

Definición 2.1:
Definimos la suma de números naturales como una aplicación $S : NxN \to N$, de modo que para $\forall n, m \in NxN, S(n,m) \in N$ se cumple que:

1) $S(0,m) = m$
2) $S(\varphi(n),m) = \varphi[S(n,m)]$.

Teorema 2.1:
La definición de suma es única, es decir, si S_1, S_2 son sumas, entonces $S_1 = S_2$.
Demostración:
Definamos dos aplicaciones, f y g, mediante S_1 y S_2, y veamos a continuación que han de coincidir.

Sea $f : N \to N$ definida para $\forall n \in N, f(n) = S_1(n,m), m \in N$

Sea $g : N \to N$ definida para $\forall n \in N, g(n) = S_2(n,m), m \in N$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = S_1(0,m) = m \\ g(0) = S_2(0,m) = m \end{array}\right\} \to f(0) = g(0)$$

$$\forall n \in N, (f \circ \varphi)(n) = f[\varphi(n)] = S_1(\varphi(n),m) = \varphi[S_1(n,m)] = \varphi[f(n)] = (\varphi \circ f)(n) \to$$
$$\to \forall n \in N, (f \circ \varphi)(n) = (\varphi \circ f)(n) \to f \circ \varphi = \varphi \circ f$$
$$\forall n \in N, (g \circ \varphi)(n) = g[\varphi(n)] = S_2(\varphi(n),m) = \varphi[S_2(n,m)] = \varphi[g(n)] = (\varphi \circ g)(n) \to$$
$$\to \forall n \in N, (g \circ \varphi)(n) = (\varphi \circ g)(n) \to g \circ \varphi = \varphi \circ g$$

Es decir, las dos aplicaciones, f y g, son tales que tienen la misma imagen para el cero y además conmutan con la aplicación siguiente, por lo que, aplicando el teorema 1.2, $f(n) = g(n), \forall n \in N$ es decir, $S_1(n,m) = S_2(n,m), n, m \in N$.

NOTACIÓN: Representaremos en adelante la suma de dos elementos de N, m y n, en la manera habitual:

$$S(n,m) = n + m$$

y las dos condiciones de la definición serían, con esta notación:

1) $0 + m = m$
2) $\varphi(n) + m = \varphi(n+m)$.

Teorema 2.2:
Se verifican las propiedades asociativa, conmutativa y cancelativa para la suma de números naturales:

Propiedad asociativa: $\forall a,b,c \in N, (a+b)+c = a+(b+c)$

Propiedad conmutativa: $\forall a,b \in N, a+b = b+a$

Propiedad cancelativa: $\forall a,b,c \in N, a+c = b+c \to a = b$ (también llamada propiedad simplificativa de la suma)

Demostración:

1) Propiedad asociativa: $\forall a,b,c \in N, (a+b)+c = a+(b+c)$

Sea $A = \{a \in N / (a+b)+c = a+(b+c)), \forall b,c \in N\}$. Veamos que tal conjunto coincide con N.

- $0 \in A$, pues aplicando la primera condición de definición de la suma, es $(0+b)+c = b+c$ y también: $0+(b+c) = b+c$, por ello es $(0+b)+c = 0+(b+c)$.
- $\forall a \in A, a+(b+c) = (a+b)+c \to \varphi(a+(b+c)) = \varphi((a+b)+c) \to \varphi(a)+(b+c) =$ $= \varphi(a+b)+c \to \varphi(a)+(b+c) = (\varphi(a)+b)+c \to \varphi(a) \in A$

En definitiva, vemos que 1) $0 \in A$, 2) $a \in A \to \varphi(a) \in A \Rightarrow A = N$, por Ax.5.

Luego, se verifica que $a+(b+c) = (a+b)+c, \forall a,b,c \in N$.

2) Propiedad conmutativa: $\forall a,b \in N, a+b = b+a$

2.1) Veamos primero que $\forall b \in N, 0+b = b+0$

$A = \{b \in N / 0+b = b+0\}$

- $0 \in A$, pues $0+0 = 0+0$
- $\forall b \in A, \varphi(b)+0 = \varphi(b+0) = \varphi(0+b) = \varphi(b) = 0+\varphi(b) \to \varphi(b) \in A$

Luego, por Ax.5, es $A = N$, y se verifica que $\forall b \in N, 0+b = b+0$.

2.2) Veamos ahora que $\forall b \in N, \varphi(0)+b = b+\varphi(0)$

$A = \{b \in N / \varphi(0)+b = b+\varphi(0)\}$

- $0 \in A$, pues $\varphi(0)+0 = \varphi(0+0) = \varphi(0) = 0+\varphi(0)$
- $\forall b \in A, \varphi(b)+\varphi(0) = \varphi(b+\varphi(0)) = \varphi(\varphi(0)+b) = \varphi[\varphi(0+b)] =$ $= \varphi(\varphi(b)) = \varphi(0+\varphi(b)) = \varphi(0)+\varphi(b) \to \varphi(b) \in A$

Luego, por Ax.5, es $A = N$, y se verifica que $\forall b \in N, \varphi(0)+b = b+\varphi(0)$.

2.3) Veamos finalmente que $\forall a,b \in N, a+b = b+a$

$A = \{b \in N / a+b = b+a, \forall a \in N\}$

- $0 \in A$, pues $a+0 = 0+a, \forall a \in N$, por 2.1).
- $\forall b \in A, a+\varphi(b) = a+\varphi(0+b) = a+[\varphi(0)+b] = [a+\varphi(0)]+b =$ $= [\varphi(0)+a]+b = \varphi(0)+[a+b] = \varphi[0+(a+b)] = \varphi(a+b) =$ $= \varphi(b+a) = \varphi(b)+a \to \varphi(b) \in A$

Luego, por Ax.5, es $A = N$, y se verifica que $\forall a,b \in N, a+b = b+a$.

3) Propiedad cancelativa: $\forall a,b,c \in N, a+c = b+c \to a = b$

$A = \{c \in N / a+c = b+c \to a = b\}$

- $0 \in A$, pues $a+0 = b+0 \to 0+a = 0+b \to a = b$ por 2.1).
- $\forall c \in A, a+\varphi(c) = b+\varphi(c) \to \varphi(c)+a = \varphi(c)+b \to \varphi(c+a) = \varphi(c+b) \to$ $\to c+a = c+b \to a+c = b+c \to a = b$. Por tanto, $\varphi(c) \in A$

Luego, por Ax.5, es $A = N$, verificándose la propiedad.

3. La multiplicación o producto de números naturales:

Definición 3.1:

Definimos la multiplicación de números naturales como una aplicación $P : NxN \to N$, de modo que para $\forall n,m \in NxN, P(n,m) \in N$ se cumple que:

1) $P(0,m) = 0$
2) $P(\varphi(n),m) = P(n,m)+m$.

Teorema 3.1:
La definición de multiplicación es única, es decir, si P_1, P_2 son multiplicaciones, entonces $P_1 = P_2$.
Demostración:
Definamos dos aplicaciones, f y g, mediante P_1 y P_2, y veamos a continuación que han de coincidir.

Sea $f: N \to N$ definida para $\forall n \in N,\ f(n) = P_1(n,m),\ m \in N$

Sea $g: N \to N$ definida para $\forall n \in N,\ g(n) = P_2(n,m),\ m \in N$

Definamos también $\rho: N \to N$: $\forall n \in N,\ \rho(n) = n + m,\ m \in N$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = P_1(0,m) = 0 \\ g(0) = P_2(0,m) = 0 \end{array}\right\} \to f(0) = g(0)$$

$$\forall n \in N, (f \circ \varphi)(n) = f[\varphi(n)] = P_1(\varphi(n),m) = P_1(n,m) + m = \rho[P_1(n,m)] = \rho[f(n)] =$$
$$= (\rho \circ f)(n) \to f \circ \varphi = \rho \circ f$$
$$\forall n \in N, (g \circ \varphi)(n) = g[\varphi(n)] = P_2(\varphi(n),m) = P_2(n,m) + m = \rho[P_2(n,m)] = \rho[g(n)] =$$
$$= (\rho \circ g)(n) \to g \circ \varphi = \rho \circ g$$

Es decir, las dos aplicaciones, f y g, son tales que tienen la misma imagen para el cero y además existe una aplicación ρ de N en N tal que $f \circ \varphi = \rho \circ f,\ g \circ \varphi = \rho \circ g$, por lo que, teniendo en cuenta el teorema 1.3, ambas aplicaciones coinciden, $f(n) = g(n), \forall n \in N$ es decir, $P_1(n,m) = P_2(n,m),\ n,m \in N$.

NOTACIÓN: Representaremos en adelante la multiplicación de dos elementos de N, m y n, en la manera habitual:

$$P(n,m) = n.m$$

y las dos condiciones de la definición serían, con esta notación:

1) $0.m = 0$
2) $\varphi(n).m = n.m + m$.

Teorema 3.2:
Se verifican las propiedades distributiva respecto de la suma, asociativa, conmutativa y cancelativa para la multiplicación de números naturales:
Propiedad distributiva respecto de la suma: $\forall a,b,c \in N,\ a.(b+c) = a.b + a.c$
Propiedad conmutativa: $\forall a,b \in N,\ a.b = b.a$
Propiedad asociativa: $\forall a,b,c \in N,\ (a.b).c = a.(b.c)$
Propiedad cancelativa: $\forall a,b,c \in N,\ a.c = b.c \to a = b$

Demostración:

1) Propiedad distributiva respecto de la suma: $\forall a,b,c \in N,\ a.(b+c) = a.b + a.c$

Consideremos $\mathrm{A} = \{a \in N / a.(b+c) = a.b + a.c,\ \forall b,c \in N\}$, y veamos que tal conjunto coincide con N.
- $0 \in \mathrm{A}$, pues $0.(b+c) = 0$, y $0.b + 0.c = 0 + 0 = 0$, luego $0.(b+c) = 0.b + 0.c$
- $\forall a \in \mathrm{A}, \varphi(a).(b+c) = a.(b+c) + (b+c) = a.b + a.c + b + c = (ab+b) + (a.c+c) =$
$= \varphi(a).b + \varphi(a).c \to \varphi(a).(b+c) = \varphi(a).b + \varphi(a).c \to \varphi(a) \in \mathrm{A}$
En definitiva, vemos que 1) $0 \in \mathrm{A}$, 2) $a \in \mathrm{A} \to \varphi(a) \in \mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{A} = N$, por Ax.5.

Luego, se verifica que $a.(b+c) = a.b + a.c, \forall a,b,c \in N$.

2) Propiedad conmutativa: $\forall a,b \in N,\ a.b = b.a$

2.1) veamos primero que $\forall b \in N,\ 0.b = b.0$

Sea $\mathrm{A} = \{b \in N / b.0 = 0.b\}$, y veamos que coincide con N.

- $0 \in \mathrm{A}$, pues 0.0=0.
- $\forall b \in \mathrm{A},\ 0.\varphi(b) = 0,\ \varphi(b).0 = b.0 + 0 = 0.b + 0 = 0 + 0 = 0 \to \varphi(b).0 = 0.\varphi(b) \to$
$\to \varphi(b) \in \mathrm{A} \to \mathrm{A} = N,$ por Ax.5

2.2) Veamos ahora que también es $\forall b \in N,\ \varphi(0).b = b.\varphi(0)$

Sea $\mathrm{A} = \{b \in N / b.\varphi(0) = \varphi(0).b\}$, y veamos que coincide con N.

- $0 \in \mathrm{A}$, pues, por 2.1), es $0.\varphi(0) = \varphi(0).0$.
- $\forall b \in \mathrm{A},\ \varphi(b).\varphi(0) = b.\varphi(0) + \varphi(0) = \varphi(0).b + \varphi(0) = \varphi(0).b + \varphi(0).\varphi(0) =$
$= \varphi(0)(b + \varphi(0)) = \varphi(0)(\varphi(0) + b) = \varphi(0)\varphi(0 + b) = \varphi(0)\varphi(b) \to$
$\to \varphi(b).\varphi(0) = \varphi(0)\varphi(b) \to \varphi(b) \in \mathrm{A} \to \mathrm{A} = N,$

2.3) Finalmente podemos ver ya que $\forall a,b \in N,\ a.b = b.a$

Sea $\mathrm{A} = \{b \in N / b.a = a.b, \forall a \in N\}$

- $0 \in \mathrm{A}$, pues por 2.1) es $0.a = a.0$
- $\forall b \in \mathrm{A},\ \varphi(b).a = b.a + a = a.b + a = a.b + a.\varphi(0) = a.(b + \varphi(0)) = a.(\varphi(0) + b) =$
$= a.\varphi(0 + b) = a.\varphi(b) \to \varphi(b).a = a.\varphi(b) \to \varphi(b) \in \mathrm{A}$

Así, pues, por Ax.5 es $\mathrm{A} = N$, cumpliéndose que $\forall a,b \in N,\ a.b = b.a$

3) Propiedad asociativa: $\forall a,b,c \in N,\ (a.b).c = a.(b.c)$

Sea $\mathrm{A} = \{a \in N / a.(b.c) = (a.b).c, \forall b,c \in N\}$ y veamos su coincidencia con N.

- $0 \in \mathrm{A}$, pues $0.(b.c) = 0,$ y $(0.b).c = 0.c = 0$, luego $(0.b).c = 0.(b.c)$
- $\forall a \in \mathrm{A},\ \varphi(a).(b.c) = a.(b.c) + b.c = (a.b).c + b.c = c.(a.b) + c.b = c(a.b + b) =$
$= c.(\varphi(a).b) = (\varphi(a).b).c \to \varphi(a).(b.c) = (\varphi(a).b).c \to \varphi(a) \in \mathrm{A}$

Luego, por Ax.5, es $\mathrm{A} = N$, y se verifica que $\forall a,b,c \in N,\ (a.b).c = a.(b.c)$

4) Propiedad cancelativa o simplificativa: $\forall a,b,c \in N,\ a.b = a.c \to b = c \vee a = 0$

Consideremos $\mathrm{A} = \{a \in N / a.b = ac \to b = c \vee a = 0\}$

- $0 \in \mathrm{A}$, por definición de A.
- $\forall a \in \mathrm{A},\ \varphi(a).b = \varphi(a).c \to a.b + b = a.c + c \to a.b + b = a.c + c \wedge a.b = a.c \to b = c$, por la propiedad cancelativa de la suma. Por tanto, $\forall a \in \mathrm{A},\ \varphi(a).b = \varphi(a).c \to b = c$, lo que nos indica que $\varphi(a) \in \mathrm{A}$, y por Ax.5, que $\mathrm{A} = N$. Por consiguiente, la propiedad cancelativa es correcta: $\forall a,b,c \in N,\ a.b = a.c \to b = c \vee a = 0$.

4. La ordenación:

De los axiomas de Peano sabemos que todo número natural tiene un siguiente. Veamos, que cualquier número natural, salvo el cero, es siguiente de otro número natural, mediante una sencilla proposición.

Teorema 4.1:
Todo número natural distinto del cero es el siguiente de otro número natural:

$$\forall n \in N / n \neq 0,\ \exists m \in N / \varphi(m) = n$$

Demostración:
Consideremos el conjunto $\mathrm{A} = \{n \in N / n = 0 \vee \exists m \in N / \varphi(m) = n\}$, y veamos que ha de coincidir con N usando el axioma 5 de la inducción completa.
- $0 \in \mathrm{A}$, por construcción de A.
- $\forall n \in \mathrm{A}, \exists m \in N / \varphi(m) = n \rightarrow \varphi[\varphi(m)] = \varphi(n) \rightarrow \exists \varphi(m) / \varphi[\varphi(m)] = \varphi(n) \rightarrow \varphi(n) \in \mathrm{A}$

O sea, 1) $0 \in \mathrm{A},\ \forall n \in \mathrm{A} \rightarrow \varphi(n) \in \mathrm{A}$, lo que implica que $\mathrm{A} = N$, y, por consiguiente, todo número natural n distinto del cero es el siguiente de otro número natural m, que, además, es único, pues por el axioma 4, $\varphi(a) = \varphi(b) \rightarrow a = b$.

Definición 4.1:

a) Se define la relación "menor o igual que" $(\leq)$ del modo siguiente:

$$\forall a, b \in N,\ a \leq b \leftrightarrow \exists q \in N / a + q = b$$

b) Se define la relación "mayor o igual que" $(\geq)$ de la forma:

$$\forall a, b \in N,\ a \geq b \leftrightarrow b \leq a$$

c) Se define la relación "menor estrictamente que" $(<)$:

$$\forall a, b \in N,\ a < b \leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b$$

d) Se define la relación "mayor estrictamente que" $(>)$:

$$\forall a, b \in N,\ a > b \leftrightarrow b < a$$

Teorema 4.2:
La relación "menor o igual que" es relación de orden, es decir, es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Demostración:

a) es reflexiva:

$$\forall a \in N, \exists 0 \in N / a + 0 = 0 + a = a \rightarrow a \leq a$$

b) es antisimétrica:

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq a \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists p \in N / a + p = b \\ \exists q \in N / b + q = a \end{array}\right\} \rightarrow b = a + p = b + q + p = b + (p + q) \rightarrow b = b + (p + q) \rightarrow$$

$$\rightarrow p = q = 0 \rightarrow a = b$$

c) es transitiva:

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq c \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists p \in N / a + p = b \\ \exists q \in N / b + q = c \end{array}\right\} \rightarrow c = b + q = a + p + q = a + (p + q) \rightarrow c = a + (p + q) \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists (p + q) \in N / a + (p + q) = c \rightarrow a \leq c$$

Corolario 1:

a) La relación "mayor o igual que" es también relación de orden.
b) La relación "menor estrictamente que" es relación de orden estricto.
c) La relación "mayor estrictamente que" es relación de orden estricto.

Demostración:
Es trivial, en los tres casos, a la vista del teorema.

Corolario 2:
Todo número natural es estrictamente menor que su siguiente: $\forall a \in N, a < \varphi(a)$
Demostración:
$\varphi(a) = \varphi(0 + a) = \varphi(0) + a \to \exists \varphi(0) \in N / a + \varphi(0) = \varphi(a) \to a \leq \varphi(a)$
por teorema 1.1 sabemos que $a \neq \varphi(a)$, por tanto:

$$a \leq \varphi(a) \wedge a \neq \varphi(a) \to a < \varphi(a)$$

Corolario 3:
El cero es menor estrictamente que cualquier otro número natural: $0 < n, \forall n \neq 0$
Demostración:
Por teorema 4.1, $\forall n \in N / n \neq 0,\ \exists m \in N / \varphi(m) = n$.
Si $m = 0 \to m = 0 \wedge m < \varphi(m) = n \to 0 < \varphi(0) \to 0 < n$
Si $m \neq 0 \to \exists p \in N / \varphi(p) = m$
Si $p = 0 \to p = 0 \wedge p < \varphi(p) = m \to 0 < \varphi(0) \to 0 < m < n$
Si $p \neq 0 \to \exists q \in N / \varphi(q) = p$
Y así, podríamos continuar el proceso, con lo que aplicando la propiedad transitiva, encontramos que $0 < n, \forall n \neq 0$.

Teorema 4.3:
Se verifica la alternativa siguiente:

$\forall a, b \in N, a < b \vee a = b \vee a > b$ (propiedad de tricotomía).

(esto es lo mismo que afirmar que $\forall a, b \in N, a \leq b \vee b \leq a$, es decir, que la relación de órden "$\leq$" es un orden total)
Demostración:
Fijemos el elemento a y definamos los tres conjuntos que establecen la tricotomía: $A_1 = \{a\},\ A_2 = \{b \in N / b < a\},\ A_3 = \{b \in N / b > a\}$. Como veremos, los tres conjuntos son disjuntos dos a dos.

El teorema quedará probado si $N = \bigcup_{i=1}^{3} A_i$ siendo $A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j$. Veámoslo suponiendo en primer lugar que es *a=0* y luego para $a \neq 0$.

a) Si es *a=0*: $A_1 = \{0\},\ A_2 = \phi,\ A_3 = \{b \in N / b > 0\} = \{b \in N / b \neq 0\}$. Obviamente, en este caso se verifica que $N = \{0\} \cup \phi \cup \{b \in N / b \neq 0\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, verificandose también que
$A_1 \cap A_2 = \{0\} \cap \phi = \phi,$
$A_1 \cap A_3 = \{0\} \cap \{b \in N / b \neq 0\} = \phi,$
$A_2 \cap A_3 = \{b \in N / b < a\} \cap \{b \in N / b > a\} = \phi$

b) Si es $a \neq 0$, como es a>0, entonces $0 \in A_2$
Consideremos el conjunto $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ a fin de aplicar la inducción completa:
- $0 \in A$, pues $0 \in A_2$.
- $\forall b \in A \to b \in A_1 \vee b \in A_2 \vee b \in A_3$
  - Si $b \in A_1 \to b = a \to \varphi(b) > b \to \varphi(b) > a \to \varphi(b) \in A_3 \to \varphi(b) \in A$

  - Si $b \in A_2 \to b < a \to \exists p \in N / b + p = a,\ p \neq 0.$

Si $p = \varphi(0) \to b + \varphi(0) = a \to \varphi(b) = a \to \varphi(b) \in \mathrm{A}_1 \to \varphi(b) \in \mathrm{A}$

Si $p \neq \varphi(0) \to \exists r \in N / p = r + \varphi(0) \to b + p = b + r + \varphi(0) \to$

$\to (b + \varphi(0)) + r = a \to \varphi(b) + r = a \to \varphi(b) < a \to \varphi(b) \in \mathrm{A}_2 \to$

$\to \varphi(b) \in \mathrm{A}$

- Si $b \in \mathrm{A}_3 \to b > a \to \varphi(b) > b > a \to \varphi(b) > a \to \varphi(b) \in \mathrm{A}_3 \to$

$\to \varphi(b) \in \mathrm{A}$

En definitiva, $\forall b \in \mathrm{A} \to \varphi(b) \in \mathrm{A}$. En consecuencia es $\mathrm{A} = N$ por el axioma 5.
Verificándose que

$$\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_2 = \{a\} \cap \{b \in N / b < a\} = \phi,$$
$$\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{A}_3 = \{a\} \cap \{b \in N / b > a\} = \phi,$$
$$\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3 = \{b \in N / b < a\} \cap \{b \in N / b > a\} = \phi$$

Es obvio que las dos primeras intersecciones son el vacío. Veamos que también se verifica la tercera mediante una reducción al absurdo. Supongamos que existe un número $q \in \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3$:

$q \in \mathrm{A}_2 \cap \mathrm{A}_3 \to q \in \mathrm{A}_2 \wedge q \in \mathrm{A}_3 \to q < a \wedge q > a \to q > q$ lo que es absurdo.

Teorema 4.4:

$$\forall a, b \in N,\ a < b \to \begin{cases} a + p < b + p,\ \forall p \in N \\ a.p < b.p,\ \forall p \in N,\ p \neq 0 \end{cases}$$

Demostración:

1) $a < b \to \exists q \in N, q \neq 0 / a + q = b \to b + p = a + q + p = (a + p) + q \to a + p < b + q$

2) $a < b \to \exists q \in N, q \neq 0 / a + q = b \to b.p = (a + q).p = a.p + q.p \wedge q.p \neq 0 \to$
$\to a.p < b.p$

Teorema 4.5:

1) $\forall p \in N, a + p < b + p \to a < b$

2) $\forall p \in N,\ p \neq 0, a.p < b.p \to a < b$

Demostración:

1) $a + p < b + p \to \exists q \in N, q \neq 0 / b + p = (a + p) + q \to b + p = (a + q) + p \to$
$\to b = a + q \wedge q \neq 0 \to a < b$

2) Si $a.p < b.p$ entonces puede darse solamente una de estas tres relaciones: $a = b,\ a > b,\ a < b$. Vamos a ver que no pueden darse las dos primeras:

- Si $a = b \to a.p = b.p$, que no es el caso, luego $a \neq b$.
- Si $a > b \to a.p > b.p,$ que tampoco es el caso, luego $no\ a > b$

por tanto, por la propiedad de tricotomía, ha de ser $a < b$

Teorema 4.6:

$$\forall a, b \in N,\ a > b \to \begin{cases} a + p > b + p,\ \forall p \in N \\ a.p > b.p,\ \forall p \in N,\ p \neq 0 \end{cases}$$

Demostración:
Trivialmente análoga a la demostración del teorema 4.4.

Teorema 4.7:

1) $\forall p \in N, a + p > b + p \rightarrow a > b$
2) $\forall p \in N,\ p \neq 0, a.p > b.p \rightarrow a > b$

Demostración:
Trivialmente análoga a la demostración del teorema 4.5.

Con estos cuatro últimos teoremas comprobamos la estabilidad del orden total en N con respecto a las dos leyes internas, operaciones, definidas antes.

En consecuencia, los cinco axiomas de Peano permiten construir el conjunto N de los números naturales y establecer su estructura algebraica como la de un semianillo conmutativo con elemento unidad y totalmente ordenado, en donde es el cero el elemento neutro de la suma o ley aditiva del semianillo y $\varphi(0)$ el elemento unidad, neutro para la multiplicación o ley multiplicativa del semianillo.

$$\forall a \in N, a + 0 = 0 + a = a$$
$$\forall a \in N, a.\varphi(0) = \varphi(0).a = a$$

$(N,+,.,\leq)$ es semianillo conmutativo con elemento unidad totalmente ordenado.

5. Bibliografía:

Birkhoff, G.-McLane, S.; "Álgebra Moderna", Vicens Vives, 1974.
Cohn, P.M.; "Classic Algebra", John Wiley & Sons, 2001
García Merayo, F.; "Matemática discreta", Paraninfo, 2001.
Godement, R.-Melendez Rolla, M.; "Algebra", Editorial Tecnos, 1974
Grimaldi, R. P.; "Matemática discreta y combinatoria". Addison-Wesley Iberoamericana, 1989.
Johnsonbaugh, R.; "Matemática Discreta". Pearson Educación, 2005.
Rosen, K. H.; "Matemática Discreta y sus aplicaciones". McGraw-Hill, 2004.
Vera López, A. y otros; "Álgebra abstracta aplicada". 1992.