Sobre la numerabilidad y el continuo

Desde Cantor conocemos la diferencia entre lo que es numerable, discreto, y lo que es continuo, denso. Conocemos que existe un número transfinito, aleph sub cero, para describir lo que es discreto y otro número transfinito para describir lo que es continuo. Cantor supuso que no hay otros números transfinitos entre ambos aleph. Hoy sabemos que también podía haber supuesto lo contrario.

Dos conjuntos, A y B, se dicen *coordinables*, o *biyectables*, o *equipolentes*, o también, *de igual tamaño*, si existe una aplicación biyectiva, una biyección, entre ambos.

Definición 01
El conjunto A se dice coordinable con el conjunto B si existe una aplicación biyectiva $f : A \to B$

$$A \approx B \leftrightarrow \exists f : A \to B \wedge f \ biyectiva$$

Teorema 01
Si existiera el conjunto U de todos los conjuntos, la coordinabilidad de conjuntos sería una relación de equivalencia en U que partiría a éste en clases de equivalencia, estando constituida cada clase por todos los conjuntos de igual tamaño.
Demostración:
Veamos que es reflexiva:

$$(\forall A)(\exists I_A : A \to A) / I_A \ identidad \to A \approx A \to reflexiva$$

Es simétrica:

$$A \approx B \leftrightarrow \exists f : A \to B \wedge f \ biyectiva \to \exists f^{-1} : B \to A / f \circ f^{-1} = I_B \wedge f^{-1} \circ f = I_A \to$$
$$\to f^{-1} biyectiva \to B \approx A \to simétrica$$

Finalmente, es transitiva:

$$\left.\begin{array}{l} A \approx B \leftrightarrow \exists f : A \to B \wedge f \ biyectiva \\ B \approx C \leftrightarrow \exists g : B \to C \wedge g \ biyectiva \end{array}\right\} \to g \circ f : A \to C \wedge g \circ f \ biyectiva \to A \approx C \to$$
$$\to transitiva$$

Definición 02
Un conjunto se dice que es finito si no es coordinable con ninguno de sus subconjuntos propios, esto es, si no existe una biyección del conjunto con ninguna de sus partes propias.

Un conjunto es infinito si es biyectable con alguno de sus subconjuntos propios.

Definición 03
Se dice que dos conjuntos, A y B, tienen el mismo numero cardinal si son biyectables.

Representaremos en adelante el número cardinal correspondiente al conjunto A por card(A).

$$card(A) = card(B) \leftrightarrow A \approx B$$

En el sentido del teorema 01, podría decirse que las clases de equivalencia de la relación de coordinabilidad tienen igual número cardinal.

Los números cardinales de los conjuntos finitos se llaman, simplemente, números finitos, y los números cardinales de los conjuntos infinitos se denominan números transfinitos.

Teorema 02:
La condición necesaria y suficiente para que el cardinal de un conjunto A sea estrictamente menor que el cardinal de otro conjunto B es que no existan aplicaciones sobreyectivas de A en B.

$$card(A)<card(B) \Leftrightarrow \forall f : A \to B \ f \ no \ sobreyectiva$$

Demostración:
Obviamente, pues si elegimos f inyectiva, se tiene que al no ser sobreyectiva, no será tampoco biyectiva, por lo que A será coordinable con una parte estricta de B, o sea, card(A)<card(B).

Teorema 03: (Teorema de Cantor)
Para cualquier conjunto se verifica que su cardinal es inferior estrictamente al de su conjunto potencia (conjunto de sus partes):

$$(\forall A)(card(A) < card(P(A))$$

Demostración:
Bastará probar que no existe nunca una aplicación sobreyectiva $f : A \to p(A)$, por lo que, en virtud del teorema anterior, el cardinal de A es estrictamente inferior al cardinal de $p(A)$.
Veámoslo por reducción al absurdo:
Supongamos que f es sobreyectiva, es decir, que $\forall B \in p(A), \exists b \in A / f(b) = B$ y veamos que entonces se da una contradicción para una cierta parte B de A.
Elijamos como conjunto B aquella parte de A formada por lo elementos cuya imagen por f no los contiene, es decir, por aquellos elementos a los que corresponde una parte, elemento de $p(A)$, a la cual no pertenecen:

$$B = \{x \in A / x \notin f(x)\}$$

En definitiva nos encontramos, por ser sobreyectiva que $\exists b \in A / f(b) = B$. Veamos que, entonces, el elemento b no puede pertenecer a B porque sería contradictorio, ni tampoco puede no pertenecer a B porque también sería contradictorio:
1) $b \in B \to b \in B \wedge f(b) = B \to b \in f(b) \wedge B = \{x \in A / x \notin f(x)\} \to b \notin B \to contradic$
2) $b \notin B \to b \notin B \wedge f(b) = B \to b \notin f(b) \wedge B = \{x \in A / x \notin f(x)\} \to b \in B \to contradic$
por tanto no es cierto que $\exists b \in A / f(b) = B \to f \ no \ sobreyectiva$

$$(\forall f : A \to P(A))(f \text{ no sobreyectiva}) \to card(A) < card(p(A))$$

Símbolos de representación de los cardinales finitos:

Conjuntos de tamaño nulo:

$0 = card(\phi)$

Siguientes:

$1 = card(\{\phi\}) = card(\{0\})$

$2 = card(\{\phi, \{\phi\}\}) = card(\{0,1\})$

$3 = card(\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}) = card(\{0,1,2\})$

$4 = card(\{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\} \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}\}) = card(\{0,1,2,3\})$

... ...

... ...

$n = card(01,2,3,..., n-1)$

Los números transfinitos pueden representarse por símbolos cualesquiera, si bien se acostumbra a usar el símbolo Aleph, con un subíndice para indicar el aleph siguiente de cada aleph dado:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, ..., \aleph_n, ...$$

Definición 04

Se llama Conjunto de los Números Naturales, N, al conjunto de los cardinales de los conjuntos finitos:

$$N = \{0,1,2,3,..., n,...\}$$

Teorema 04

El conjunto N es un conjunto infinito

Demostración:

Bastará probar que es coordinable con alguna de sus partes propias. Elijamos la parte de N constituida por todos los números pares (incluimos el cero): $S = \{0,2,4,..., p,...\}$

La aplicación biyectiva $f : N \to S$ entre N y la parte propia S es obvia:

$$\forall n \in N, \ f(n) = 2n$$

estando su aplicación inversa $f^{-1} : S \to N$ dada por:

$$\forall p \in S, \ f^{-1}(p) = p/2$$

Definición 05

El número transfinito que se acostumbra a usar desde Cantor, para representar al cardinal del conjunto N de los números naturales es $\aleph_0$ (Aleph sub cero). Tal número se denomina *potencia del numerable*, y se llama *numerable* a todo conjunto que sea coordinable con N, esto es, que tenga su mismo tamaño.

Teorema 05

El conjunto Z de los números enteros es numerable.

Demostración:
Es preciso probar que existe alguna aplicación biyectiva $f : N \to Z$
Sea la aplicación $f : N \to Z$:

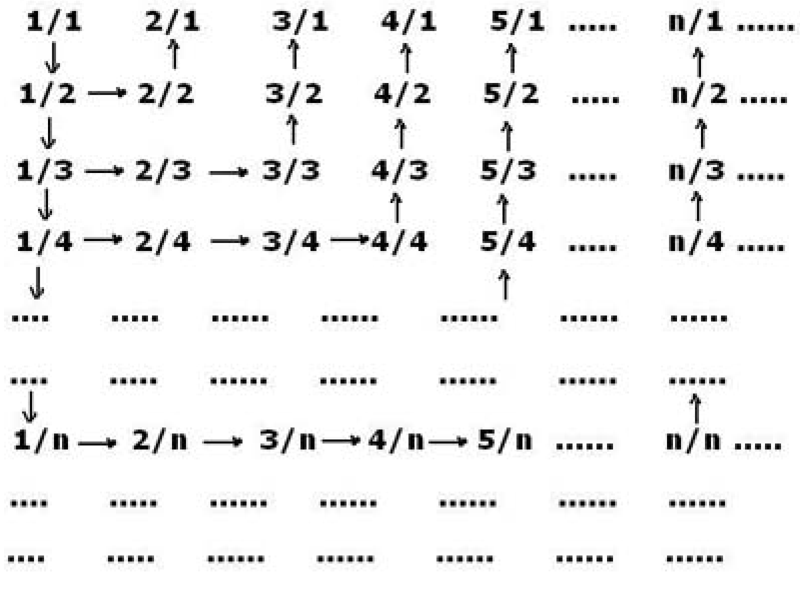
$$\forall n \in N,\ f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2},\ si\ n\ es\ par \\ -\dfrac{n+1}{2},\ si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

que es biyectiva, cuya aplicación inversa $f^{-1} : Z \to N$ es:

$$\forall z \in Z,\ f^{-1}(z) = \begin{cases} 2z,\ si\ z \geq 0 \\ -(2z+1),\ si\ z < 0 \end{cases}$$

Teorema 06
El cuerpo Q de los números racionales es numerable.
Demostración:
Se trata de comprobar la coordinabilidad del conjunto Q con el conjunto Z, es decir, que existe una aplicación biyectiva entre el conjunto Q de los números racionales y el conjunto Z de los números enteros, y como sabemos, por el anterior teorema, que el conjunto Z es coordinable con los números naturales, se deduce, en virtud de la propiedad transitiva de la relación de coordinabilidad, que el conjunto Q es también coordinable con los números naturales, esto es, que Q es numerable.

Para ver la coordinabilidad con Z, supongamos los números racionales positivos dispuestos en filas de igual denominador y columnas de igual numerador, tal como se muestra a continuación, y establezcamos un orden que obedezca a estas reglas: 1) el siguiente de m/1 es 1/(m+1), 2) el siguiente de m/n es (m+1)/n si m<n, o bien es m/(n-1) si m≥ n>1, 3) el primer elemento es 1/1. Este orden equivale a recorrer los sucesivos rectángulos numéricos en sentido contrario al de las agujas del reloj, tal como se muestra. Las fracciones equivalentes, naturalmente, se eliminan del orden.



El orden establecido será:

1/1, ½, 2/1, 1/3, 2/3, 3/2, 3/1, 1/4, 3/4, 4/3, 4, 1/5, 2/5, …. (se van eliminando las fracciones equivalentes, 2/2, 3/3, …)

El orden así establecido comprende al total de las fracciones positivas, que quedan en correspondencia biunívoca (biyección) con los enteros positivos: $Q^+ \approx Z^+$. Del mismo modo y mediante el mismo procedimiento, establecemos también una biyección de los racionales negativos con los enteros negativos $Q^- \approx Z^-$, y de aquí la coordinabilidad del cuerpo Q con el anillo Z de los enteros. Como Z es numerable, también, en definitiva, Q resulta ser numerable.

Teorema 07:
El intervalo de números reales (0,1) es un conjunto infinito no numerable.
Demostración:

- El intervalo (0,1) es infinito. Basta ver, por ejemplo, que contiene al conjunto infinito dado por $S = \left\{ \frac{1}{n} / n \in N - \{0\} \right\}$.
- El intervalo (0,1) no es numerable, pues si suponemos que es numerable y existe una aplicación inyectiva $f : N \to (0,1)$ tal que

$$\begin{array}{ccccc} f(1) & = & r_1 & = & 0,r_{11}r_{12}r_{13}...r_{1n}... \\ f(2) & = & r_2 & = & 0,r_{21}r_{22}r_{23}...r_{2n}... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ f(n) & = & r_n & = & 0,r_{n1}r_{n2}r_{n3}...r_{nn}... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{array}$$

(donde las r_{ij} son las cifras decimales del número r_i)

Siempre existe en el intervalo (0,1) otro número real x, que no está en el conjunto de las imágenes $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$. Esto podemos comprobarlo mediante el llamado *argumento diagonal de Cantor*, que consiste en construir el número x mediante la siguiente regla:
"Si el n-simo decimal del número r_n no es 1, entonces el n-simo decimal del número x si es 1, caso contrario, el n-simo decimal de x es 2."
Es obvio que, por construcción, el número x no coincide con ninguno de los elementos del conjunto $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$. Veamos un ejemplo:
Sean

$$\begin{array}{l} r_1 = 0{,}4102321... \\ r_2 = 0{,}5100450... \\ r_3 = 0{,}3431111... \\ r_4 = 0{,}5611136... \\ r_5 = 0{,}0100010... \\ ...\ ...\ ...\ ...\ ...\ ... \end{array}$$

el número x, que no coincide con ninguno de ellos, es $x = 0{,}12121...$
Por consiguiente, no existe una aplicación biyectiva $f : N \to (0,1)$, pues para cualquier secuencia de imágenes $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ de los elementos de N, siempre existirán elementos x que no figuran en la misma. En definitiva, el intervalo (0,1) no es numerable.

Teorema 08:
Dos intervalos cualesquiera de números reales son coordinables.

Demostración:
Sean dos intervalos cualesquiera $(a,b),(c,d) \subseteq R$, y construyamos una aplicación biyectiva entre ambos.

- Sea $f:(a,b) \to (c,d)$, por la condición $\forall x \in (a,b), f(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$, en la que es inmediato que $f(x) \in (c,d), \forall x \in (a,b)$, la cual es biyectiva, con inversa dada por $f^{-1}:(c,d) \to (a,b)$, $\forall y \in (c,d), f^{-1}(y) = a + \frac{b-a}{d-c}(y-c)$

Veamos que, efectivamente, es $(f^{-1} \circ f)(x) = I_A(x) = x$:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] = a + \frac{b-a}{d-c}(f(x)-c) = a + \frac{b-a}{d-c}\left(c + \frac{d-c}{b-a}(x-a) - c\right) =$$

$$= a + \frac{b-a}{d-c}\left(\frac{d-c}{b-a}(x-a)\right) = a + (x-a) = x$$

O sea: $f^{-1} \circ f = I_A \to f \ biyectiva$

Los dos intervalos, por consiguiente, tienen el mismo cardinal transfinito.

Corolario:
Todos los intervalos de números reales son infinitos y no numerables.
Demostración:
Por el teorema anterior son todos coordinables, y por tanto coordinables al intervalo (0,1), que, por el teorema 09, es infinito y no numerable.

Teorema 09:
Existe una biyección del intervalo (-1,1) en R.
Demostración:
Veamos que la aplicación $f:(-1,1) \to R$ definida por la condición:

$\forall x \in (-1,1), f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ es una aplicación biyectiva.

a) es inyectiva:

$$f(x) = f(y) \to \frac{x}{1-|x|} = \frac{y}{1-|y|} \to \frac{x}{1-|x|} = \frac{y}{1-|y|} \wedge 1-|x| > 0$$

si $x > 0 \to y > 0 \wedge |x| = x \wedge |y| = y \to x = y$

si $x < 0 \to y < 0 \wedge |x| = -x \wedge |y = -y \to x = y|$

Luego, se cumple que $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, por lo que *f* es inyectiva.

b) es sobreyectiva:
Veamos que, efectivamente, cualquier elemento de R es imagen de algún elemento del intervalo (-1,1): $\forall z \in R, \exists x \in (-1,1) / f(x) = z$

Si z>0: $\exists x = \frac{z}{1+|z|} \in (-1,1) / f(x) = \frac{x}{1-|x|} = \frac{\frac{z}{1+|z|}}{1-\frac{z}{1+|z|}} = \frac{z}{1+|z|-z} = \frac{z}{1} = z$

Si z<0: $\exists x = \frac{z}{1-|z|} \in (-1,1) / f(x) = \frac{x}{1-|x|} = \frac{\frac{z}{1-|z|}}{1-\frac{z}{1-|z|}} = \frac{z}{1-|z|-z} = \frac{z}{1} = z$

En definitiva, el intervalo (-1,1) es biyectable con R.

Corolario:
El cuerpo R de los números reales no es numerable. Es decir, su aleph es superior al aleph sub cero.
Demostración:
El conjunto R de los números reales es coordinable con (-1,1), que es infinito y no numerable, luego R es también infinito y no numerable.

La Hipótesis del Continuo:
Se trata de una conjetura de Cantor, por la cual el número transfinito que representa al cardinal del cuerpo de los números reales es el aleph siguiente del aleph sub cero. Es decir, la conjetura afirma que entre el cardinal de N y el cardinal de R no existe ningún otro número transfinito.

$$card(R) = \aleph_1$$

Cantor no logró probar esta conjetura, y a principios de siglo XX era uno de los grandes problemas de la Matemática (figura en la lista de los 23 problemas de Hilbert).

Se intentaron pruebas diversas desde los axiomas de la Teoría de Conjuntos (Axiomas de Zermelo-Fraenkel con Ax. De elección) sin que se pudiera conseguir una demostración, hasta que en 1938, Kurt Gödel probó que esta afirmación es compatible con el sistema axiomático de la teoría de conjuntos.

En 1962, sin embargo, Paul Cohen probó que su negación también es compatible con dicho sistema de axiomas, por lo que la conclusión que se extrae de ello es que la Hipótesis del Continuo es indecidible dentro del sistema axiomático indicado.

Es decir, puede construirse una matemática que, de acuerdo con la hipótesis de Cantor, incluya como axioma la afirmación de que no existe un número transfinito entre el cardinal de N y el cardinal de R, y también puede construirse una matemática no cantoriana, en donde se incluya el axioma de que el cardinal de R no es el aleph siguiente del cardinal de N.