

Primitivas de integrales en R^3

Adolfo Acosta, licenciado en física.
Egresado de la Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela
adolfoa_18@yahoo.com

El propósito que nos motiva en este artículo es presentar a la comunidad científico-técnica, por vez primera en el cálculo, algunas primitivas de integrales del espacio R^3 , y comparar sus ventajas y su poder con los métodos tradicionales de tres dimensiones (3D) de la integral múltiple. Como veremos la existencia de una primitiva para un cálculo de más de una variable independiente, es posible si definimos un patrón de expansión para las variables, es decir, si escogemos una base particular sobre la cual integramos.

Pero antes de comenzar es necesario levantar algunas aclaratorias acerca del uso y manejo de una primitiva de integral de tres dimensiones, que dista en mucho del cálculo (2D) al cual estamos acostumbrados, pero que nos permitirá generalizar este procedimiento para una primitiva n dimensional:

Consideraciones para integrales de tres dimensiones:

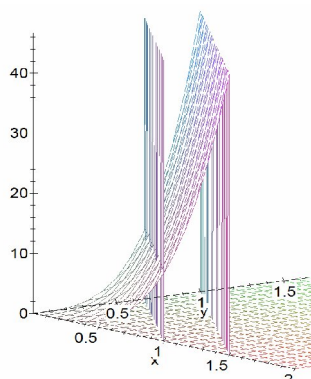
- 0) La interpretación física de la integral en 3D es un volumen.
- 1) La base en la integración 3D (a diferencia de 2D) debe escogerse de entre un sinnúmero de formas. Aquí consideraremos dos: base triangular y base circular-elíptica.
- 2) El Diferencial dxy que usamos como notación no representa un rectángulo infinitesimal como en la integral doble de 2D.
- 3) Los Límites de integración para evaluar la primitiva, son las distintas ecuaciones de la superficie que delimitan el volumen a calcular.
- 4) La Constante de integración C , puede ser en algunos casos funciones de x e y , dependiendo de la base escogida y el tipo de expansión de las variables. En estos ejemplos la omitiremos para mayor simplicidad en el procedimiento.
- 5) La manera como deducimos algunas de las fórmulas principales, forma parte de la teoría de “Integrales de Simetría en 3D”, la cual esta explicitada en la revista interciencia y que será próximamente publicada. Dicho artículo puede bajarse de la página web del VI Congreso Venezolano de la Física en el menú contribution list ID 148 <http://eventos.saber.ula.ve/eventos/conferenceDisplay.py?confId=0>

Tabla de Integrales base Triangular

Función	Primitiva 3D
$(ax + by)^n$	$\int (ax + by)^n dxy = \frac{xy(ax + by)^n}{n + 2}$
e^{x+y}	$\int e^{(x+y)} dxy = \frac{xy(1 - e^{x+y}(1 - x - y))}{(x + y)^2}$
$\sin(x + y)$	$\int \sin(x + y) dxy = 2 \frac{\left\{ 1 - e^{-(x+y)^2} \left[1 + (x + y)^2 + 1/2(x + y)^4 \right] \right\}}{(x + y)^5}$
$\cos(x + y)$	$\int \cos(x + y) dxy = -xy \frac{\left[1 - e^{-(x+y)}(x + y + 1) \right]}{(x + y)^2}$

Ilustremos el uso de una primitiva de 3D con el siguiente **ejemplo**:

Hallar el volumen bajo la superficie de la función $f(x, y) = \sqrt{(2x + 3y)^7}$, y entre los planos $2x + 3y = 3$, $2x + 3y = 2$. En la gráfica siguiente mostramos lo que queremos hallar:



Aplicando la primera fórmula de la tabla, la primitiva es:

$$F(x, y) = \int \sqrt{(2x + 3y)^7} dxy = \frac{xy \sqrt{(2x + 3y)^7}}{\left(\frac{7}{2} + 2\right)}$$

$$F(x, y) = \frac{2xy \sqrt{(2x + 3y)^7}}{11}$$

Ahora una vez obtenida la primitiva. Procedemos a introducir los parámetros de integración, que son las distintas ecuaciones de superficie que envuelven el volumen a calcular, las cuáles agrupamos a la manera de b y a de la integral tradicional.

$$\mathbf{b} = \begin{cases} x = 3/2 \\ y = 1 \end{cases} \quad 2x + 3y = 3 \quad \mathbf{a} = \begin{cases} x = 1 \\ y = 2/3 \end{cases} \quad 2x + 3y = 2$$

Introducimos estos parámetros en la primitiva hallada en la forma $F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a})$:

$$\frac{F(\mathbf{b})}{11} - \frac{F(\mathbf{a})}{11} = \frac{2 \cdot (3/2) \cdot (1) \cdot (3)^{7/2}}{11} - \frac{2 \cdot (1) \cdot (2/3) \cdot (2)^{7/2}}{11} = 11,38283$$

Se halla este mismo resultado por el método tradicional de la integral doble, que requiere resolver complicadas integrales, además de partir la región en dos partes:

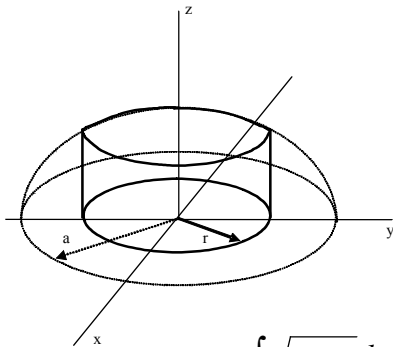
$$V = \int_0^1 \int_{\frac{2}{3}-\frac{2}{3}x}^{1-\frac{2}{3}x} \sqrt{(2x+3y)^7} dx dy + \int_1^{3/2} \int_0^{1-\frac{2}{3}x} \sqrt{(2x+3y)^7} dx dy$$

Tabla de integrales para base circular

Función	Primitiva
Constante K	$K \pi (x^2 + y^2)$
$(x^2 + y^2)^n$	$\pi \cdot \frac{(x^2 + y^2)^{n+1}}{n+1}$
$1/(x^2 + y^2)$	$\pi \cdot \text{Ln}(x^2 + y^2)$
$e^{x^2+y^2}$	$\pi \cdot e^{x^2+y^2}$
$\sin(x^2 + y^2)$	$\pi \cdot \cos(x^2 + y^2)$

Ilustremos también el uso de esta tabla con algunos ejemplos:

Ejemplo 1: calcular el volumen de una semiesfera de radio a , $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ interceptada con un cilindro de radio r , $(x^2 + y^2 = r^2)$.



Para hallar la primitiva de $f(x,y)$ procedemos como estamos acostumbrados en el cálculo tradicional, por cambio de variable y aplicando la segunda fórmula de la tabla.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = -\frac{\pi(a^2 - x^2 - y^2)^{1/2+1}}{1/2+1} = -\frac{2\pi}{3} \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^3}$$

Note que este procedimiento es equivalente a resolver la integral de 2D $\int \sqrt{a-x} dx$ ya que el diferencial 3D (base circular) de $x^2 + y^2$ es $dx dy/\pi$.

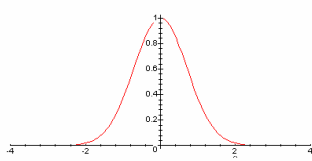
Ahora insertamos en esta primitiva obtenida, los límites de integración que son las superficies cilíndricas $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 = r^2$. que definen el volumen.

Y el resultado es finalmente: $V = \frac{2}{3} \pi \left[\sqrt{(a^2)^3} - \sqrt{(a^2 - r^2)^3} \right]$.

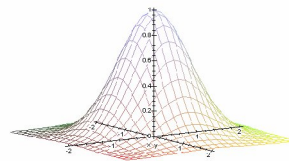
Retamos al lector a obtener este mismo resultado analítico, por los medios tradicionales de la integral múltiple o por cualquier otro medio.

Ejemplo 2

Si quisiéramos calcular, por ejemplo, el volumen generado por la campana de Gauss e^{-x^2} en revolución, tomaríamos la primitiva de la exponencial $e^{-x^2-y^2}$ y evaluaríamos desde los límites de integración: $x^2 + y^2 = 0$ a $x^2 + y^2 = \infty$ (superficies de contorno).



$$y = e^{-x^2}$$



$$z = e^{-x^2-y^2}$$

Dicha primitiva $F(x,y)$ es entonces:

$$F(x,y) = \int e^{-x^2-y^2} dxy = -\pi e^{-x^2-y^2}$$

El volumen buscado al introducir los parámetros de integración es:

$$V = F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a}), \quad \mathbf{a} = (0,0); \quad \mathbf{b} = (\infty,\infty)$$

$$V = -\pi e^{-\infty} - (-\pi e^{-0}) = \pi$$

El lector puede notar la simplicidad, facilidad y poder de estas integrales, en contraste con los medios tradicionales de la integral múltiple para obtener este mismo resultado, que además requiere cambiar a coordenadas polares.

Conclusiones: Los resultados en 3D redundan en lo que ya se ha derivado de 2D. Sin embargo tenemos un procedimiento mucho más resumido, y un mayor poder de cálculo. Además se abre un nuevo horizonte de aplicaciones, si consideramos todas las herramientas afines al cálculo: La derivada 3D para cada tipo de base, ecuaciones diferenciales, series de potencias, polinomios etc. a las cuales habría que aplicarles este nuevo concepto, sobre el enfoque de un cálculo para dos o más variables independientes.

Agradecimientos:

A Dios quien da la ciencia y la sabiduría Da 2:20-22.

A mi esposa Josefina por su constante ánimo para llevar a cabo este ensayo.