

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES NO LINEALES, APOYANDONOS CON EL ASISTENTE MATEMÁTICO DERIVE

Pedro Castañeda Porras
Arellys Quintero Silverio
Eugenio Hernández Vargas
pcasta@mat.upr.edu.cu,
arelys_quintero@yahoo.es,
eugenio@mat.upr.edu.cu

Universidad de Pinar del Río, Cuba.

Campo de Investigación: Resolución de Problemas.

Nivel Educativo: Superior.

INTRODUCCIÓN.

La aparición y el perfeccionamiento incesante de los ordenadores de alta velocidad han conducido a una transformación auténticamente, revolucionaria de la ciencia en general y de las matemáticas, en particular. Ha cambiado la tecnología de las investigaciones científicas, han aumentado inmensamente las posibilidades de los estudios teóricos, del pronóstico de procesos complejos, de la proyección de las construcciones de ingeniería.

Únicamente gracias a la aplicación de la simulación matemática y de nuevos métodos numéricos destinados para los ordenadores se hizo posible resolver grandes problemas científico - técnicos. La idea es explotar las capacidades simbólicas y gráfica del ordenador (en este caso, vía "DERIVE") con el doble objetivo de aclarar la base conceptual del cálculo y llevar a cabo la resolución de problemas inabordables con papel y lápiz en un tiempo razonable.

DESARROLLO:

Uno de los problemas que con mayor frecuencia aparece en la ciencia y en la ingeniería es hallar las raíces de una ecuación no lineal de la forma $f(x) = 0$.

Estudiaremos Métodos Iterativos para determinar aproximaciones a raíces reales simples de la ecuación lineal $f(x) = 0$.

A la hora de estudiar estos métodos, es necesario hacer una buena localización de la raíz, es decir, la búsqueda de un intervalo con estas características le llamamos "Separación o Localización de Raíces" y es la etapa previa a la resolución numérica de la ecuación.

Comenzaremos este trabajo con el siguiente problema:

Problema 1.

En el cálculo hidráulico de tuberías se utiliza la fórmula DARCY-PRANDTL-COLEBROOK que proporciona las pérdidas debidas a la fricción, en función de los

coeficientes de fricción: $h = \lambda L \frac{V^2}{2gD}$

Donde D: Diámetro de la tubería. (m), L: Longitud de la conducción.(m), V: Velocidad media de flujo. (m/s), g: Aceleración de la gravedad (m/s^2); y el valor de Lambda puede obtenerse a partir de la ecuación de COLEBROOK:

$$\lambda^{-1/2} = -2 \ln \left(\frac{2.51}{Re \lambda^{1/2}} + \frac{K}{3.71D} \right) \quad \text{Siendo ahora: Re: Número de Reynolds,}$$

μ : Viscosidad cinemática (m^2/s); K : Altura de rugosidad.

Es conocido que para colectores tubulares rectos y sin acometida $K=0.25$ mm, $D=300$ mm y $Re=200\ 000$. nuestro problema consiste por tanto en:

Determinar el valor de Lambda de la ecuación:

$$\lambda^{-1/2} = -2 \ln \left(\frac{2.51}{2 \cdot 10^5 \lambda^{1/2}} + \frac{25 \cdot 10^{-5}}{1.113} \right)$$

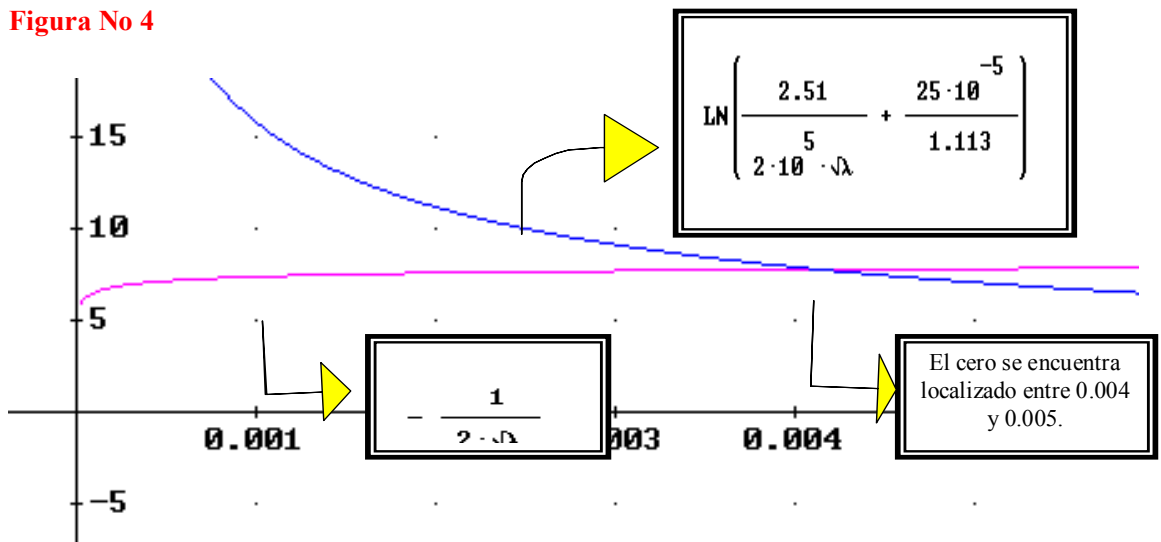
LOCALIZACION DE LA RAIZ.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \cdot \text{LN} \left(\frac{2.51}{2 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{25 \cdot 10^{-5}}{1.113} \right)$$

$$-\frac{1}{2 \cdot \sqrt{\lambda}} = \text{LN} \left(\frac{2.51}{2 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{\lambda}} + \frac{25 \cdot 10^{-5}}{1.113} \right)$$

Para la localización de la raíz se tuvo en cuenta las consideraciones físicas del problema y fundamentalmente el método gráfico con la ayuda del DERIVE que sin dudas lo hace más asequible.

Figura No 4



A continuación veremos los métodos de:

Bisección; Regula - Falsi; Newton - Raphson

Método de la Bisección.

El método requiere de dividir repetidamente a la mitad a los subintervalos de $[a,b]$ y, cada paso, localizar la mitad que contiene \bar{x}

Programa para la Bisección utilizando DERIVE:

$f(x):=$

$g(a,b):=if(f(a) \cdot f((a+b)/2) < 0, [a, (a+b)/2], [(a+b)/2, b])$

$bisección(a,b,n):=iterate(g(element(v,1), element(v,2)), v, [a,b], n)$

$error(a,b,n):=(b-a)/2^n$

Programa para la Regula Falsi en DERIVE:

$f(x):=$

$z(a,b):=b-f(b)(b-a)/(f(b)-f(a))$

$h(a,b):=if(f(a)f(z(a,b))<0,[a,z(a,b)],[z(a,b),b])$

$ifalsi(a,b,n):=iterate(h(element(v,1),element(v,2)),v,[a,b],n)$

$falsi(a,b,n):=z(element(ifalsi(a,b,n-1,1)),element(ifalsi(a,b,n-1,2)))$

Método de Newton:

Bajo condiciones más fuertes pueden desarrollarse métodos de convergencias esencialmente mayores, como los de convergencia cuadrática. Entre estos vamos a analizar el denominado Método de Newton ó Newton - Raphson.

Programa para Newton Raphson en DERIVE:

$f(x):=$

$Newton(a,n):=iterates(x-f(x)/dif(f(x),x),x,a,n)$, a: valor de arranque. n: número de iteraciones

Solución del problema cálculo hidráulico de tuberías.

Modelo Matemático $f(x)=...$

Localización de la raíz: Escala: Hacer $x=0.001$, $y=5$ y apreciar que la raíz se encuentra entre $(0.004;0.006)$, aproximadamente. Antes de empezar los cálculos según los métodos, utiliza: Options Precision Approximate 16 Digits. y se obtiene ; $r \approx 0.0041348015378662572$.

Problema 2

Redes de polarización en circuitos integrados.

En circuitos integrados las corrientes de polarización en los transistores se establecen en corrientes de referencias en otras ramas del circuito.

Se demuestra que $I_2 = I_1 = (V_{cc}-V_{BE})/R_1$, si las áreas de Q_1 y Q_2 son iguales.

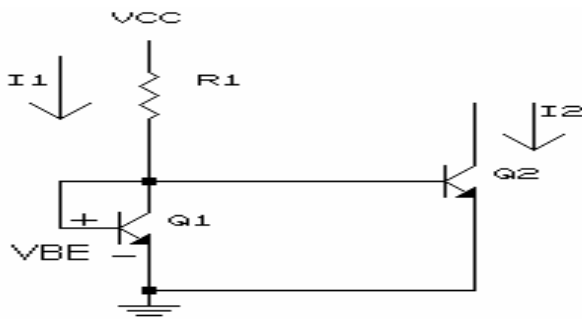
Entonces:

$$I_1 = I_{ss} \cdot \exp(V_{BE1}/V_T)$$

$$I_2 = I_{ss} \cdot \exp(V_{BE2}/V_T)$$

I_{ss} = Area.constante tecnológica. $V_T = KT/q=26\text{mv}$ a T amb.

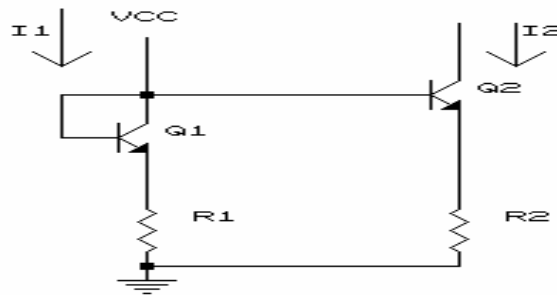
Por tanto $I_1 = I_2$ si $V_{BE1} = V_{BE2}$



B: base ; E: emisor; C: colector; I_{ss} : corriente inversa de saturación; K: constante de Boltzman

T: temperatura en grados kelvin; q: carga del electrón.

Se pueden ajustar las corrientes por relación de áreas si $AQ_2 = KAQ_1$ entonces $I_2 = KI_1$, pero esto es práctico hasta $K=5$ aproximadamente. Otra variante es ajustar por relaciones de resistencia.



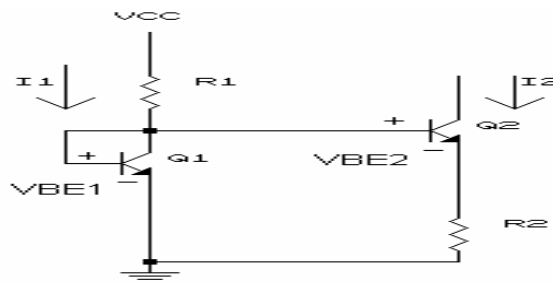
$$I_1 R_1 \cong I_2 R_2 ; I_2 \cong I_1 R_1 / R_2.$$

Un caso particular de ésta es la llamada Fuente Logarítmica, para ajustar valores de I_2 pequeños, para I_1 alta. Aquí los V_{BE} difieren y la diferencia queda aplicada a través de R_2 .

$V_{BE1} - V_{BE2} = I_2 R_2$ (1); $I_2 = \Delta V_{BE} / R_2$ (2); de las expresiones anteriores:

$$I_1 = I_{ss} \cdot \exp(V_{BE1} / V_T) \quad (3); \quad I_2 = I_{ss} \cdot \exp(V_{BE2} / V_T) \quad (4); \quad I_1 / I_2 = \exp((V_{BE1} - V_{BE2}) / V_T) \quad (5)$$

$\ln(I_1 / I_2) = \Delta V_{BE} / v_T$ (6); sustituyendo en (2): Obtenemos: $I_2 = V_T / R_2 \cdot \ln(I_1 / I_2)$; También se puede expresar: $I_2 = V_T / R_2 \cdot \ln[(V_{cc} - V_{BE}) / R_1] / I_2$



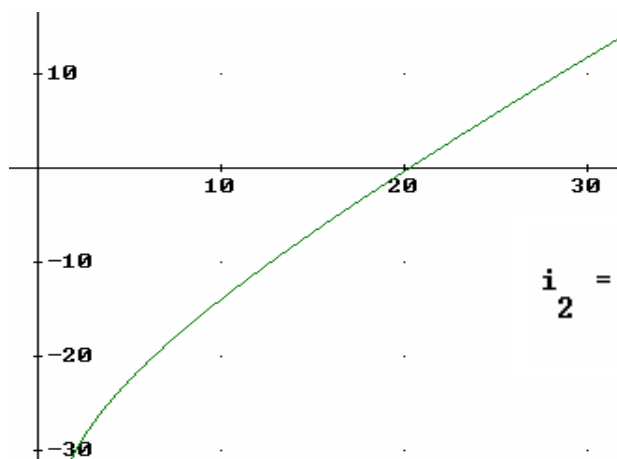
Hallar I_2 , en el esquema de la fuente logarítmica si, $R_2 = 5K$, $V_{cc} = 10v$, $R_1 = 9.4k$, $V_{BE} = 0.6$, $V_T = 26mv$.

Solución:

$$I_1 = (V_{cc} - V_{BE}) / R_1 = 1mA; \quad V/O = A; \quad I_2 = 26mV / 5K \cdot \ln(1mA / I_2); \quad I_2 = 5.2mA \cdot \ln(1000 \mu / I_2) \quad mV/KO = \mu A \quad \mu: \text{micro.}$$

Localización de la raíz utilizando el Asistente

Sugerencia:



Sugerencia:

Hacer $I_2 = x$

$$i_2 = 5.2 \cdot \text{LN} \left(\frac{1000}{i_2} \right)$$

Hacer gráfico con plot usando escala $x=20$; $y=20$ y se obtiene $I_2 \approx 20.27222786855236$

Es importante referirnos al término **articulación interdisciplinaria** que define todos los vínculos que deben establecerse entre una disciplina y el resto de las disciplinas del plan de estudio de un determinado modelo del profesional, lo cual constituye una necesidad de la enseñanza contemporánea .

A través de la articulación se logra:

- La motivación hacia las disciplinas básicas, dejando al descubierto su verdadera razón de ser en el plan de estudio.
- Vincula a los profesores del ciclo básico y a sus estudiantes con la bibliografía, los conceptos y la nomenclatura propia de la especialidad.
- Aporta los problemas y ejercicios de la especialidad necesarios para lograr habilidades específicas.

CONCLUSIONES:

Hemos probado la utilidad del ordenador en proyectos de laboratorio vía DERIVE mediante la resolución numérica de ecuaciones no lineales utilizando los métodos iterativos. Hasta el momento se usaban otros paquetes que no eran lo más eficiente posible, el DERIVE, sin embargo, tiene alta potencialidad en el cálculo, con una precisión deseada y fundamentalmente un fuerte tratamiento gráfico, que es de gran ayuda en la solución de estos problemas.

Es importantes el estudio de la teoría de la resolución numérica de ecuaciones no lineales para un mejor uso y comprensión de las facilidades que ofrece este programa.

Este programa será utilizado como medio de enseñanza en las asignaturas de matemática de las carreras de Ciencias Técnicas.

BIBLIOGRAFÍA:

Curtir, F. Gerald, Editorial Alfa Omega, 1991.

Llorens, J.L. ,(1995), Introducción al uso de DERIVE. Aplicaciones al Álgebra y al Cálculo. Universidad Politécnica de Valencia. España.(U. P. V.)

Novalés, F., Pérez, J., Castañeda, P. , (1997), Métodos Numéricos. U.P.V.

Pérez, P. , (1996), Matemática asistida por ordenador. Cálculo infinitesimal. U. P. V.

Sánchez, J. (1997), Curso de práctica de matemática para primer curso de Ingeniería, U. P. V.

Suárez, M. , Matemática Numérica. U. H.

Llorens, J. L. Introducción al DERIVE. Aplicaciones al Álgebra y al Cálculo. Universidad Politécnica de Valencia. Servicios de publicaciones. ISBN 84-7721-199-x, 1993.

Experiencias Matemáticas y Didácticas en la Universidad de Pinar del Río. Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia, España. Depósito legal: V-1081-2001. I.S.B.N. 84-699-4419-3.

Pedro Castañeda Porras
Arellys Quintero Silverio
Eugenio Hernández Vargas