ESPACIOS DE RIEMANN

:

0.Introducción:

Se trata aquí de establecer la existencia de espacios vectoriales más generales que los espacios euclidianos, es decir, de definir espacios que contengan a los espacios euclidianos como caso particular.

Para ello hemos de establecer primero el concepto de variedad y, a continuación, el de métrica sobre una variedad. Estos espacios más generales que los euclidianos serán, simplemente, variedades con métrica definida.

[regresar]

1.Variedades n-dimensionales. Representación:

Se llama *Variedad n-dimensional, V_n,* aun conjunto de n variables y^1, y^2, ..., y^n, definidas en intervalos reales dados, I_1, I_2, ..., I_n.

Una variedad bidimensional, V_2, por ejemplo, es el conjunto formado por dos variables, y^1, y^2 definidas cada una sobre un intervalo de números reales I_1, I_2.

Una variedad n-dimensional cualquiera admite diferentes *representaciones* según el carácter de las variables que constituyen la variedad (si son segmentos rectilíneos, si son medidas angulares, etc.), con respecto a un sistema de ejes cartesianos.

Ejemplo:

Sea V_2 una variedad bidimensional donde las dos variables están definidas en los intervalos que se indican:

. $y^1 = u$, estando u definida en el intervalo

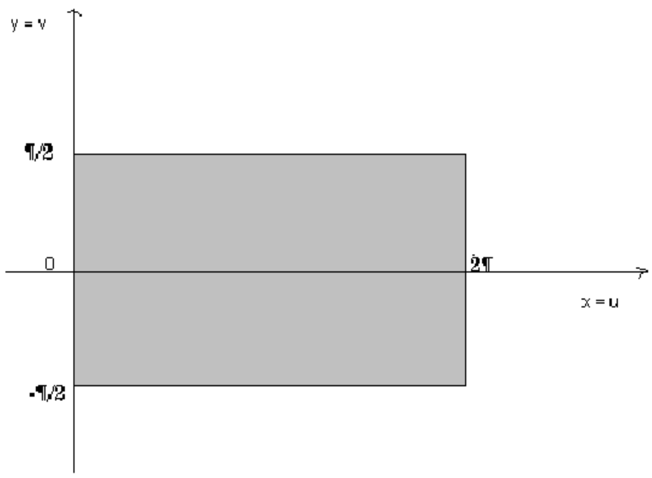
$$(0,2\pi), \qquad u \in (0,2\pi)$$

. $y^2 = v$, estando v definida en el intervalo

$$\left(-\frac{1}{2}\pi,+\frac{1}{2}\pi\right), \qquad v \in \left(-\frac{1}{2}\pi,+\frac{1}{2}\pi\right)$$

Esta variedad admite diferentes formas de representación. Veamos:

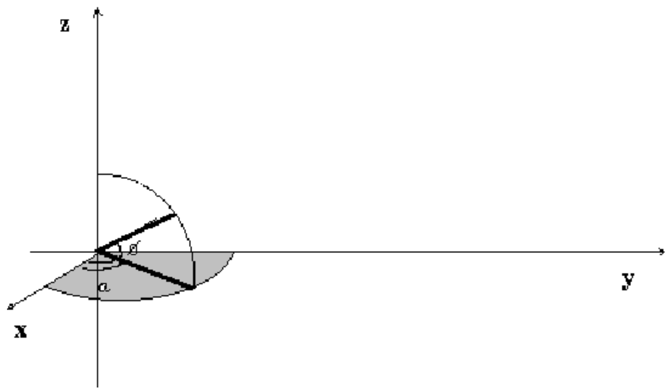
a. Representación plana: Sobre unos ejes cartesianos x, y, z, se tiene que si u y v son medidas lineales, la representación de la variedad es el siguiente dominio plano:



Y se tienen las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = u \\ y = v \end{array}\right\rangle \Rightarrow \begin{cases} dx = du \\ dy = dv \end{cases}$$

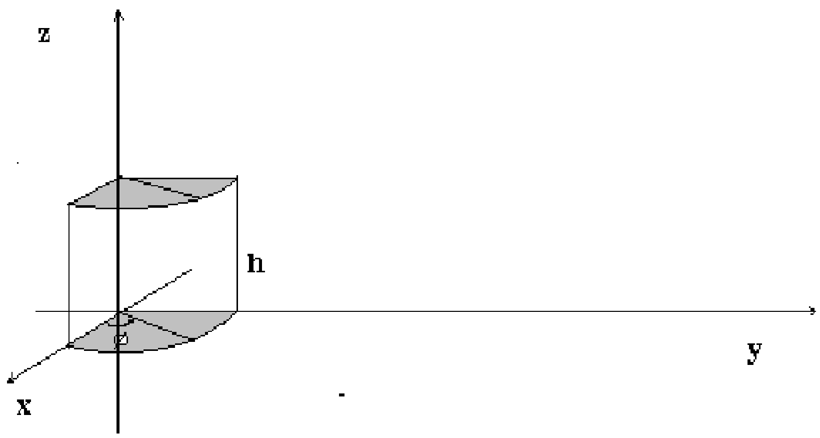
b. Representación esférica: Sobre ejes cartesianos x, y, z, se tiene que si u y v son medidas angulares, (en la figura: u = α y v = ϕ) se tiene el siguiente dominio esférico de radio r:



Y se cumplen las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\alpha \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ z = r\,\mathrm{sen}\,\phi \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} dx = -r.\,\mathrm{sen}\,\alpha d\alpha \\ dy = r\cos\alpha d\alpha \\ dz = r\cos\phi d\phi \end{array}\right.$$

a. Representación cilíndrica: Si u y v son un ángulo ϕ y una distancia h, respectivamente, se tienen la representación de un dominio cilíndrico:



b.

Con las relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\phi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z = h \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} dx = -r.\,\mathrm{sen}\,\phi d\phi \\ dy = r\cos\phi d\phi \\ dz = dh \end{array}\right.$$

[regresar]

2. Puntos infinitamente próximos. Distancia:

Cada n-pla de valores $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ de la variedad representan un punto P de la misma. En particular, en una variedad bidimensional, cada par de valores (u, v) representan un punto de la variedad.

Dos puntos, P_1 y P_2, estarán infinitamente próximos, la diferencia entre las variables de cada n-pla es infinitesimal:

$$P_1 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

$$P_2 = (u_1 + du_1, u_2 + du_2, \ldots, u_n + du_n)$$

Esto permite obtener la *distancia entre dos puntos* por la expresión:

$$P_1P_2^2 = \sum_{k=1} dx_k^2 = \sum_{j,k=1}^{n} f(u,v).du^{j^2} du^{k^2}$$

En una variedad bidimensional, la distancia entre dos puntos infinitamente próximos vendría dada por la expresión cartesiana siguiente tomada con los ejes sobre los cuales se hace la representación:

$$P_1P_2^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

La expresión de la distancia entre dos puntos infinitamente próximos es diferente según la representación que se adopte. En realidad, esta diferencia sirve para definir el tipo de representación que se ha escogido para la variedad.

A modo de ejemplo, señalemos a continuación las distancias entre puntos infinitamente próximos en los tres casos de representación mencionados antes para V_2:

a. En la representación plana:

$$P_1P_2^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + dv^2 + 0 = dy^{1^2} + dy^{2^2}$$

en forma matricial, puede escribirse:

$$P_1P_2^2 = dy^{1^2} + dy^{2^2} = (dy^1, dy^2).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dy^1 \\ dy^2 \end{pmatrix}$$

b. En la representación esférica:

$$P_1P_2^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2.\cos^2\alpha d\alpha^2 + r^2.\text{sen}^2\alpha d\alpha^2 + r^2\cos^2\phi d\phi^2 = r^2.\cos^2 u.du^2 + r^2.dv^2 = r^2\cos^2 u.dy^{1^2} + r^2.dy^{2^2}$$

en forma matricial, puede escribirse:

$$P_1P_2^2 = r^2.\cos^2 u dy^{1^2} + r^2.dy^{2^2} = (dy^1, dy^2).\begin{pmatrix} r^2\cos^2 u & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} dy^1 \\ dy^2 \end{pmatrix}$$

c. En la representación cilíndrica:

$$P_1P_2^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2.\cos^2\phi d\phi^2 + r^2.\text{sen}^2\phi d\phi^2 + dh^2 = r^2.du^2 + dv^2 = r^2.dy^{1^1} + dy^{2^2}$$

en forma matricial, puede escribirse:

$$P_1P_2^2 = r^2.dy^{1^2} + dy^{2^2} = (dy^1, dy^2).\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} dy^1 \\ dy^2 \end{pmatrix}$$

[regresar]

3.La matriz métrica:

En general, por tanto, la distancia entre dos puntos infinitamente próximos es de la forma:

$$P_1P_2^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\,dy^i dy^k$$

Siendo el conjunto (g_{ik}) la matriz métrica de la variedad, definida por el tipo de representación adoptado.

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

En los anteriores ejemplos de representación para una variedad bidimensional, la matriz métrica seria:

- En la representación plana:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- En la representación esférica:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} r^2 . \cos^2 u & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

- En la representación cilíndrica:

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En estas condiciones, pues, precisado ya el concepto de variedad n-dimensional y de métrica, es posible definir el concepto de Espacio de Riemman.

[regresar]

4.Definición de Espacio de Riemann:

Se llama Espacio de Riemann, o bien, dominio limitado de Espacio de Riemann, de n dimensiones, al par formado por una variedad n-dimensional y una métrica:

$$R_n = (V_n, (g_{ik}))$$

Estos espacios son, por tanto, más generales que los espacios euclidianos, es decir, contienen a los espacios euclidianos como caso particular. En el ejemplo de variedad bidimensional, el dominio de la representación plana es euclidiano.

Por tanto, los conceptos deducibles en los espacios riemannnianos han de poder particularizarse a los espacios euclidianos (tales como símbolos de Christoffel, curvatura, etc.).

[regresar]

5. Vectores en un espacio de Riemann:

Sea el Espacio de Riemann

$$R_n = (V_n, (g_{ik}))$$

5.1. Vectores covariantes:

Un conjunto de n funciones

$$v_i = f_i(y^k)$$

de las coordenadas de un punto genérico de la variedad se dice que es un *vector covariante*, sii en un cambio de coordenadas de la forma

$$y^{p'} = y'^p(y^k)$$

las funciones

$$v_p' = f_p(y'^k)$$

están relacionadas con las anteriores por la expresión matricial

$$v_p' = A_p^i . v_i$$

siendo:

$$A_p^i = \frac{\partial y^i}{\partial y'^p}$$

5.2. Vectores contravariantes:

Un conjunto de n funciones

$$v^q = f_q(y^k)$$

de las coordenadas de un punto genérico de la variedad se dice que es un *vector contravariante*, sii en un cambio de coordenadas de la forma

$$y'^q = y'^q(y^k)$$

las funciones

$$v'^q = f_q(y'^k)$$

están relacionadas con las anteriores por la expresión matricial

$$v'^q = B^q_j . v^j$$

siendo:

$$B^q_j = \frac{\partial y'^q}{\partial y^j}$$

5.3. Carácter intrínseco de los vectores en un espacio de Riemann:

En los espacios euclidianos la métrica viene dada por un tensor simétrico (g_{ik}) cuyas componentes covariantes (las magnitudes g_{ik}), y contravariantes (las g^{jk}) están ligadas por la relación:

$$g_{ik}.g^{kj} = \delta_{jk}$$

y, por tanto, en estos espacios puede hablarse de *vectores* sin necesidad de añadir el calificativo de "covariante" o "contravariante", ya que las componentes, en una y otra forman están ligadas por la relación

$$g_{ik}.v^i = v_k$$

En los espacios euclidianos las magnitudes vectoriales adquieren, en definitiva, un carácter intrínseco, independiente de su forma de representación.

De acuerdo con la definición de Espacio de Riemann es una variedad, V_n, y una métrica (g_{ik}), en general no euclidiana. Para que en estos espacios riemannianos también las magnitudes vectoriales sean intrínsecas, se hace conveniente una generalización de las fórmulas euclidianas, de modo que en lo sucesivo se considerará que un Espacio de Riemann es el par

$$R_n = (V_n, (g_{ik}))$$

donde (g_{ik}) es tensor simétrico de componentes g_{ik} covariantes y g^{ik} contravariantes, ligadas por

$$g_{ik}.g^{kj} = \delta_{jk}$$

(siendo d_{jk} la delta de Cronecker)

5.4.Producto interior, norma y distancia:

El producto interior de dos vectores se define por:

$$(u,v) = g_{ij}.u^i v^j = u_j v^j$$

La norma y el módulo son:

Norma:

$$(u,u) = g_{ij}.u^i u^j = u_j u^j$$

Módulo:

$$|u| = +\sqrt{(u,u)}$$

La distancia entre puntos infinitamente próximos:

$$Distancia = g_{ik} u^i u^k$$

[regresar]