EL MÉTODO DE LAS TABLAS SEMÁNTICAS

Alberto Mejías[1]

¡Hablad, hablad, hablad sin decir nada!

KOAN ZENITA

Sinopsis

Se presenta el Método de las Tablas Semánticas como un instrumento heurístico que proporciona una forma sistemática para construir un contraejemplo, si éste existe. Se consideran dos casos: el primero muestra que, en efecto, podemos hallar un contraejemplo; el segundo, muestra que nuestro intento sistemático (y, de hecho, cualquier otro intento) de construir un contraejemplo, falla.

Abstract

The Method of Semantic Tableaux is introduced as a heuristic device that provides a systematic way for constructing a counter-example, if available. Two cases are considered: The first one shows that we can indeed find a suitable counter-example. The second shows that our systematic attempt (and, in fact, any attempt) at constructing a suitable counterexample breaks down. According to the heuristic character of the introduction the systematic treatment of symbolic logic was based upon different conceptions.

Consideremos los siguientes dos problemas:

(I) ¿Es la fórmula: $\exists z\left[P(z)\wedge\sim S(z)\right]$ una consecuencia lógica de las fórmulas:

$$\exists x\left[P(x)\wedge\sim M(x)\right] \quad \text{y} \quad \exists y\left[M(y)\wedge\sim S(y)\right]?$$

(II) ¿Es la fórmula: $\exists z\left[S(z)\wedge\sim P(z)\right]$ una consecuencia lógica de las

[1] Alberto R. Mejías E., es Licenciado en Matemática, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes, ULA (Mérida – Venezuela). Profesor de Análisis y Topología. Actualmente es jubilado de la Universidad de los Andes.
alrame59@cantv.net, alrame59@gmail.com, alrame59@hotmail.com.

fórmulas:

$$\forall x\left[P(x) \Rightarrow \sim M(x)\right] \quad \text{y} \quad \exists y\left[S(y) \wedge M(y)\right]?$$

($\sim P(x)$ denota a la negación de la proposición $P(x)$, $\wedge$ denota al operador de conjunción, $\exists$ al cuantificador existencial y $\forall$ al cuantificador universal).

Para resolver tales problemas, trataremos de mostrar, mediante la construcción de un contraejemplo, que la primera formula no es consecuencia lógica de la segunda y la tercera. Si se obtiene tal contraejemplo, la respuesta a nuestro problema es negativa. Si resulta que no se puede determinar tal contraejemplo, entonces la respuesta es afirmativa; en este caso, sin embargo, debemos asegurarnos de que no se puede obtener ningún contraejemplo. Por tanto, no debemos considerar la obtención de contraejemplos, como algo fortuito; sinó, que debemos construirlos de manera sistemática. Ahora, realmente existe un método sistemático para obtener contraejemplos, si ellos existen; consiste en desarrollar una *tabla semántica*. Consideremos las tablas correspondientes a los problemas (I) y (II).

ad (I). La tabla siguiente muestra que en este caso si podemos determinar un contraejemplo adecuado; de lo cual se infiere (de conformidad con la silogística aristotélica) que la primera fórmula no es consecuencia lógica de las otras dos.

Válida	Inválida
(1) $\exists x\left[P(x) \wedge \sim M(x)\right]$	(3) $\exists z\left[P(z) \wedge \sim S(z)\right]$
(2) $\exists y\left[M(y) \wedge \sim S(y)\right]$	(7) $M(a)$
(4) $P(a) \wedge \sim M(a)$	(11) $S(b)$
(5) $P(a)$	(12) $P(a) \wedge \sim S(a)$
(6) $\sim M(a)$	

(8) $M(b) \wedge \sim S(b)$

(9) $M(b)$

(10) $\sim S(b)$

(i)	(ii)
(13) $P(a)$	(14) $\sim S(a)$
	(16) $P(b) \wedge \sim S(b)$

(iii)	(iv)
(17) $P(b)$	(18) $\sim S(b)$

(i)	(ii)
	(15) $S(a)$

(iii)	(iv)
	(19) $S(b)$

Para construir la tabla procedemos como sigue. Las líneas (1) - (3) simplemente, establecen la condiciones que debe satisfacer un contraejemplo adecuado. En virtud de la línea (1) debe existir un ejemplar, llamémoslo *a*, que satisface la condición: $P(x) \wedge \sim M(x)$; así, tenemos la línea (4) y, por tanto, las líneas (5) - (7). En virtud de la línea (2), debe haber un ejemplar que satisface la condición: $M(y) \wedge \sim S(y)$; llamémoslo *b* y así, obtenemos las líneas (8) - (11). Por otra parte, por la línea (3), ni *a* ni *b* pueden satisfacer la condición: $P(z) \wedge \sim S(z)$; esto queda expresado por las líneas (12) y (16).

Ahora, si la fórmula (12) no es válida, entonces (i) $P(a)$ no es válida ó (ii) $\sim S(a)$ no es válida. De acuerdo con esto, la tabla se divide en dos subtablas (i) y (ii) en las cuales aparecen respectivamente, las líneas (13) *y* (14). La línea (15) se obtiene de la línea (14). Pero, la línea (13) contradice a la línea (5) y, por tanto se cierra la subtabla (i) porque no puede llevar a un contraeiemplo adecuado. Sólo queda la subtabla (ii). Esta se divide en dos subtablas (iii) y (iv), en virtud de la línea (16) y, puesto que la línea (18) contradice a la línea (10), se cierra la subtabla (iv).

Como hemos considerado todas las condiciones (1) - (3), no hay razón para introducir ejemplares adicionales. Puesto que la subtabla (iii) no se cierra, podemos considerar exitosamente concluida la construcción del contraeiemplo. A cada una de las proposiciones atómicas $P(a)$, $P(b)$, $M(a)$, $M(b)$, $S(a)$ *y* $S(b)$, esta subtabla asigna un definido *valor de veracidad*. Así, el contraejemplo provisto por la subtabla (iii), se puede describir como sigue: El universo consiste de dos ejemplares llamados *a* y *b*; La propiedad *P* pertenece a *a*, pero no a *b* e igualmente sucede con la propiedad *S*; La propiedad *M*, por otra parte, pertenece a *b*, pero no a *a*.

ad (II). En este caso nuestra tabla nos dice una historia diferente: nuestro intento sistemático (y, de hecho, cualquier intento), de construir un contraeiemplo adecuado, falla.

<table>
<tr><th colspan="2">Válida</th><th colspan="2">Inválida</th></tr>
<tr><td colspan="2">(1) $\forall x[P(x) \Rightarrow \sim M(x)]$</td><td colspan="2">(3) $\exists z[S(z) \wedge \sim P(z)]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(2) $\exists y[S(y) \wedge M(y)]$</td><td colspan="2">(7) $S(a) \wedge \sim P(a)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(4) $S(a) \wedge M(a)$</td><td>(i)</td><td>(ii)</td></tr>
<tr><td colspan="2">(5) $S(a)$</td><td>(8) $S(a)$</td><td>(9) $\sim P(a)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">(6) $M(a)$</td><td>(iii)</td><td>(iv)</td></tr>
<tr><td>(i)</td><td>(ii)</td><td>(12) $P(a)$</td><td>(14) $M(a)$</td></tr>
<tr><td></td><td>(10) $P(a)$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(11) $P(a) \Rightarrow M(a)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

(iii)	(iv)
	(13) $\sim M(a)$

La aparición de la línea (7) determina una primera división de la tabla; puesto que la línea (8) contradice a la línea (5), la subtabla (i) se cierra. La aparición de la línea (11), determina una segunda división y, cada una de las subtablas resultantes (iii) y (iv), se cierran.

Por tanto, cada modelo para las fórmulas (1) *y* (2) debe ser también, un modelo para la fórmula (3); y eso es exactamente, lo que expresamos al decir que la fórmula (3) es una consecuencia lógica de las fórmulas (1) y (2).

De hecho, este resultado corresponde a la regla aristotélica para el silogismo en el modo FESTINO.

TRANSFORMACIÓN DE NUESTRA TABLA EN UNA DERIVACIÓN FORMAL

Rearreglemos la tabla del problema (II), de la siguiente manera: mantenemos inalterada la columna de la izquierda, pero la extendemos agregándole abajo todas las fórmulas de la derecha en el orden inverso: obteniendo el siguiente resultado:

(1)	$\forall x\left[P(x)\Rightarrow\sim M(x)\right]$	(prem.)
(2)	$\exists y\left[S(y)\wedge M(y)\right]$	(prem.)
(4)	$S(a)\wedge M(a)$	(+ hip. (1))
(5)	$S(a)$	(4)
(6)	$M(a)$	(4)

---

(10) $P(a)$ (+ hip. (2))

(11) $P(a) \Rightarrow M(a)$ (4)

(13) $\sim M(a)$ (4)

---

(9) $\sim P(a)$ (- hip. (2))

(7) $S(a) \wedge \sim P(a)$ (5), (9)

---

(3) $\exists z\left[S(z) \wedge \sim P(z)\right]$ (concl.)

Esta debería de ser una grata sorpresa; pues, nos provee de una derivación formal, constituida por inferencias paso por paso. Consideremos este argumento formal, más detalladamente.

En la línea (4) introducimos, al lado de las “*premisas dadas*” (1) y (2), una hipótesis adicional. Parte de la derivación, se realiza "*bajo la hipótesis* (1)"; esto se destaca mediante las líneas horizontales simples al principio y al final. Las conclusiones (5) y (6) se explican por si mismas.

En la línea (10) se introduce una segunda hipótesis. La parte de la derivación que se realiza “bajo la hipótesis 2”, se indica mediante las líneas horizontales dobles. En la línea (13) se aplica el *modus ponens*. Resulta que la hipótesis 2 conlleva a una contradicción formal; la correspondiente conclusión *ex absurdo*, se muestra en la línea (9); el resto de la derivación ya no depende de la hipótesis (2). La conclusión de la línea (7) también se explica por si misma.

Ahora viene, en la línea (3), una consideración importante. Podría parecer que la proposición en esta línea, a saber, $\exists z\left[S(z) \wedge \sim P(z)\right]$, debería hacerse bajo la hipótesis $S(a) \wedge M(a)$. En efecto, el contexto podría sugerir que en la derivación de $\exists z[S(z) \wedge \sim P(z)]$, la especial escogencia del ejemplar a, podría jugar algún papel. Sin embargo, este no puede ser el caso, ya que ni en las premisas (1) y (2) ni en la conclusión (3), se menciona al ejemplar a. Por tanto, cualquier otro ejemplar, digamos y, serviría, igualmente bien, para nuestro propósito, sólo con tal de que satisfaga la condición $S(y) \wedge M(y)$. Consecuentemente, si hay algún elemento y de este tipo, se admite la conclusión y esta idea se expresa en la línea (3).