De las Álgebras de Sucesos a los Espacios Probabilísticos

Introducción: las álgebras de sucesos
Este trabajo podemos considerarlo continuación del titulado "Aleatoriedad y álgebras de sucesos", que figura en esta misma web, y en donde vemos, en definitiva, que todo álgebra de sucesos Σ es isomorfa a un subálgebra Ω del álgebra booleana $p(\Gamma)$, conjunto de las partes de los haces de sucesos de Σ. Si Ω no fuera un $\sigma-álgebra$, existe entonces una $\sigma-álgebra$ mínima $\Phi_m(\Omega)$ que la contiene, que es la $\sigma-álgebra$ engendrada por Ω.

Vamos a estudiar aquí la posibilidad de establecer una medida sobre una sigma-álgebra de modo que podamos hacer corresponder un número real no negativo a cada suceso de la misma, e introducir, de este modo, la idea de probabilidad.

MEDIDAS SOBRE UNA SIGMA-ÁLGEBRA

- Límites de sucesiones en una σ–álgebra:

Definición 1
Sea $\{A_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión de partes de un conjunto U. Definimos el límite superior e inferior del modo siguiente:

$$\limsup_{k\to\infty} A_k = \{x \in U / \forall n \in N, \exists m \geq n, x \in A_m\}$$

$$\liminf_{k\to\infty} A_k = \{x \in U / \exists n \in N, \forall m \geq n, x \in A_m\}$$

La sucesión dada, $\{A_k\}_{k\geq 1}$, tendrá límite si ambos, superior e inferior, coinciden:

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \limsup_{k\to\infty} A_k = \liminf_{k\to\infty} A_k$$

Es inmediato, de esta definición que:

- Si la sucesión es creciente:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq \ldots \to \lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

- Si la sucesión es decreciente:

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_k \supseteq ... \to \lim_{k \to \infty} A_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

- Funciones en la σ–álgebra:

Definición 2
Sea Φ un álgebra de sucesos y R el cuerpo infinito de los números reales. Una aplicación $f : \Phi \to R$ se dice que es *una función de conjuntos no negativa de aditividad finita* sii se verifican las dos condiciones:

a) $\forall A \in \Phi,\ f(A) \geq 0$
b) $\forall A, B \in \Phi / A \cap B = \phi \to f(A \cup B) = f(A) + f(B)$

Definición 3
Sea Φ una sigma-álgebra y R el cuerpo infinito de los números reales. Una aplicación $f : \Phi \to R$ se dice que es una *función de conjuntos no negativa con aditividad infinita*, o bien, *función de conjuntos no negativa completamente aditiva*, sii se verifican las dos condiciones

a) $\forall A \in \Phi,\ f(A) \geq 0$
b) $\forall A_k \in \Phi,\ k = 1,2,... / A_i \cap A_j = \phi,\ i \neq j \to f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f(A_k)$

Una función completamente aditiva se dice que es una *medida sobre el σ-álgebra.*

Teorema 1
Sea Φ un álgebra de booleana de partes de un conjunto U, y sea $f : \Phi \to R$ una función de conjuntos no negativa con aditividad finita. Se verifica las propiedades siguientes:
a) Si es $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una familia de elementos de Φ disjuntos dos a dos, es decir, tales que $A_i \cap A_j = \phi,\ si\ i \neq j$:

$$f\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} f(A_k)$$

b) $\forall A, B \in \Phi, f(B - A) = f(B) - f(A \cap B)$
c) $\forall A, B \in \Phi,\ f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$
d) $\forall A, B \in \Phi,\ f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$
e) $\forall A, B \in \Phi / A \subseteq B \to f(B - A) = f(B) - f(A) \wedge f(A) \leq f(B)$
f) $f(\phi) = 0$
g) $f(A \Delta B) = f(A) + f(B) - 2f(A \cap B)$

Demostración:

a) Probemos la fórmula por inducción:
   Para n=1 $\to f(A_1) = f(A_1)$
   Para n=2 $\to f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) + f(A_2),$ cierta por definición de función no negativa con aditividad finita.
   Supongámosla cierta para n=h y veamos que, entonces, habrá de ser cierta también para n=h+1:

$f\left(\bigcup_{k=1}^{h} A_k\right) = \sum_{k=1}^{h} f(A_k)$, si son $A_i \cap A_j = \phi, si\ i \neq j$

$$f\left(\bigcup_{k=1}^{h+1} A_k\right) = f\left(\left(\bigcup_{k=1}^{h} A_k\right) \bigcup A_{h+1}\right) = \sum_{k=1}^{h} f(A_k) + f(A_{h+1}) = \sum_{k=1}^{h+1} f(A_k)$$

puesto que son

$$\left(\bigcup_{k=1}^{h} A_k\right) \bigcap A_{h+1} = \phi$$

con lo cual, vemos que para todo n se verifica la fórmula propuesta.

b) Se tiene que:
$\forall A, B \in \Phi, B = (A \cap B) \cup (B \cap \overline{A})$. Puesto que $(A \cap B) \cap (B \cap \overline{A}) = \phi$, se tiene, por definición que $f(B) = f(A \cap B) + f(B \cap \overline{A}) = f(B) = f(A \cap B) +$ $+ f(B - A)$, de donde $f(B - A) = f(B) - f(A \cap B)$

c) Se tiene que $\forall A, B \in \Phi, f(A \cup B) = f(A \cup (B - A)) = f(A) + f(B - A)$, puesto que se cumple que $A \cap (B - A) = \phi$.
Si sustituimos $f(B - A)$ por la expresión obtenida en b), queda:
$f(A \cup B) = f(A) + f(B - A) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$

d) Veamos que siempre es $\forall A, B \in \Phi,\ f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$
Si $A \cap B = \phi \rightarrow f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, por definición.
Si $A \cap B \neq \phi \rightarrow f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B) \rightarrow f(A) + f(B) -$ $- f(A \cup B) = f(A \cap B) > 0 \rightarrow f(A) + f(B) > f(A \cup B)$
Por tanto, en todos los casos es $\forall A, B \in \Phi,\ f(A \cup B) \leq f(A) + f(B)$

e) Si $A \subseteq B$ es $A \cap B = A$, y por b), es $f(B - A) = f(B) - f(A \cap B) =$ $= f(B) - f(A) \rightarrow f(B - A) = f(B) - f(A)$
Como por la definición ha de ser $f(B - A) \geq 0 \rightarrow f(B) - f(A) \geq 0 \rightarrow$ $\rightarrow f(B) \geq f(A)$

f) Se tiene, puesto que $A \cap \phi = \phi$: $f(A - \phi) = f(A) - f(\phi) \rightarrow f(A) = f(A) -$ $- f(\phi) \rightarrow f(\phi) = 0$

g) Sabemos que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, y como $(A - B) \cap (B - A) = \phi$, se tiene: $f(A \Delta B) = f(A - B) + f(B - A)$, y sustituyendo las expresiones obtenidas en b):

$$\left.\begin{array}{l} f(A - B) = f(A) - f(A \cap B) \\ f(B - A) = f(B) - f(B \cap A) \end{array}\right\} \rightarrow f(A \Delta B) = f(A) + f(B) - 2.f(A \cap B)$$

- Una caracterización de la medida:

Teorema 2

Sea Φ un σ–álgebra de partes de un conjunto U, y sea $f : \Phi \rightarrow R$ una función de conjuntos no negativa con aditividad finita. Se verifica que f es una medida en Φ sii para toda sucesión decreciente $\{A_n\}_{n \geq 1}$ de elementos de Φ tales que $f(A_n) < +\infty$, para $n = 1,2,...$ se cumple que $\lim f(A_n) = 0,\ para\ n \rightarrow \infty$.

$$f \ medida \ sobre \ \Phi \Leftrightarrow \left[\forall \{A_n\}_{n\geq 1} decrec / f(A_n) < +\infty, n = 1,2,... \to \lim_{n\to\infty} f(A) = 0 \right]$$

Demostración:
Para probar la equivalencia, hemos de hacer la demostración en los dos sentidos.
- Veamos que si f es una medida, entonces $\lim f(A_n) = 0, \ para \ n \to \infty$:
pues se tiene obviamente que $A_1 = (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + ... + (A_k - A_{k+1}) + ... =$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k - A_{k+1}), \text{ con } (A_k - A_{k+1}) \cap (A_h - A_{h+1}) = \phi, \ si \ k \neq h$$

por ser f una medida se cumple que $f(A_1) = f\left(\sum_{k=1}^{\infty} (A_k - A_{k+1}) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} f(A_k - A_{k+1})$

y por ser, por hipótesis, $f(A_1) < +\infty$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(A_k - A_{k+1})$ converge. Como es

$\forall n \in N, \ f(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} f(A_k - A_{k+1})$ se tendrá, al ser la sucesión $\{A_n\}_{n\geq 1}$ decreciente:

$\lim \sum_{k=n}^{\infty} f(A_k - A_{k+1}) = 0 \ para \ n \to \infty$, luego, efectivamente $\lim f(A_n) = 0, \ para \ n \to \infty$

- Veamos ahora que si $\lim f(A_n) = 0, \ para \ n \to \infty$, entonces f es una medida:
Sea $\{A_n\}_{n\geq 1} decrec / f(A_n) < +\infty, n = 1,2,... \wedge \lim f(A_n) = 0, n \to \infty$. Llamando
$A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi_k$ se tiene que $f(A_n) = f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi_k \right) < +\infty, \ n = 1,2,...$

Sea la unión infinita $\bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi_k = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \varphi_k \right) \bigcup \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \varphi_k \right) = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \varphi_k \right) \bigcup A_n$, el valor de la función

será: $f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi_k \right) = f\left(\bigcup_{k=1}^{n-1} \varphi_k \right) + f(A_n) = \sum_{k=1}^{n-1} f(\varphi_k) + f(A_n)$. Pasando al límite, para

$n \to \infty$: $\lim f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi_k \right) = \lim \sum_{k=1}^{n-1} f(\varphi_k) + \lim f(A_n) \to f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\varphi_k) + \lim f(A_n)$

Si, por hipótesis, se verifica la condición $\lim f(A_n) = 0$, queda, finalmente:

$$f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \varphi_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\varphi_k) + 0 = \sum_{k=1}^{\infty} f(\varphi_k) \to f \ es \ una \ medida$$

- La propiedad de paso al límite en una medida:

Teorema 3
Sea Φ un σ–álgebra de partes de un conjunto U, y sea $f : \Phi \to R$ una medida sobre Φ.

a) Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de conjuntos de Φ tal que verifica que $\lim \varphi_n = \varphi, \ para \ n \to \infty$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(\varphi_n) = f(\varphi)$$

b) Si $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos de Φ tal que verifica que $\lim \psi_n = \psi,\ para\ n \to \infty$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(\psi_n) = f(\psi)$$

Demostración:

a) Sea $A_n = \varphi - \varphi_n$. Como $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es creciente, $\{A_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente y se cumple que $\lim A_n = \lim(\varphi - \varphi_n) = \varphi - \lim \varphi_n = 0,\ para\ n \to \infty$, por lo que, aplicando el teorema 2, será $\lim f(A_n) = 0\ para\ n \to \infty$. Por tanto, se tiene que $\lim f(\varphi - \varphi_n) = \lim f(\varphi) - \lim f(\varphi_n) = f(\varphi) - \lim f(\varphi_n) = 0\ para\ n \to \infty$
En definitiva, $\lim f(\varphi_n) = f(\varphi)\ para\ n \to \infty$

b) Sea $A_n = \psi_n - \psi$. Como $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ es decreciente, $\{A_n\}_{n\geq 1}$ es también decreciente y se cumple que $\lim A_n = \lim(\psi_n - \psi) = \lim \psi_n - \psi = 0,\ para\ n \to \infty$, por lo que, aplicando el teorema 2, será $\lim f(A_n) = 0\ para\ n \to \infty$. Por tanto, se tiene que
$\lim f(\psi_n - \psi) = \lim f(\psi_n) - \lim f(\psi) = \lim f(\psi_n) - f(\psi) = 0\ para\ n \to \infty$
En definitiva, $\lim f(\psi_n) = f(\psi)\ para\ n \to \infty$

- ESPACIOS PROBABILISTICOS DE KOLMOGOROFF:

Definición 4

Un *espacio probabilizable* es el par constituido por un conjunto U y una σ–álgebra Φ de partes de U:

Espacio probabilizable: (U, Φ)

(Φ es σ–álgebra de partes de U)

Se define *espacio probabilístico*, o *espacio probabilístico de Kolmogoroff*, como una terna constituida por un conjunto U, una σ–álgebra Φ de partes de U y una medida $p : \Phi \to R$ que verifica $p(U) = 1$.

Espacio probabilístico: (U, Φ, p)

(Φ σ–álgebra de partes de U, p medida sobre Φ tal que $p(U) = 1$)

Es obvio que un espacio probabilístico es un espacio probabilizable (U, Φ) dotado de una medida p que cumple la condición indicada $p(U) = 1$.

Definición 5
Se llama *probabilidad* a la medida p sobre la sigma-álgebra de un espacio probabilístico. Llamaremos *probabilidad de un suceso* M a la imagen $p(M)$ por la medida de probabilidad.

El conjunto U base del espacio probabilístico se denomina *conjunto de los sucesos elementales del espacio*.

Teorema 4
Se verifican las siguientes propiedades para la medida de probabilidad:
1) $p(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{j=1}^{n} p(A_k), \forall A_k \in \Phi, k = 1,2,... / A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$
2) $p(B - A) = p(B) - p(A \cap B), \forall A, B \in \Phi$
3) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B), \forall A, B \in \Phi$
4) $p(A \cup B) \leq p(A) + p(B), \forall A, B \in \Phi$
5) $A \subseteq B \to p(B - A) = p(B) - p(A)$
6) $p(\phi) = 0$
7) $p(A \Delta B) = p(A) + p(B) - 2.p(A \cap B)$
Demostración:
Trivialmente, por el teorema 1 se cumplen para cualquier medida.

Teorema 5

$$\forall \{A_n\}_{n\geq 1} decrec / p(A_n) < +\infty, n = 1,2,... \to \lim_{n\to\infty} p(A) = 0$$

Demostración:
Trivialmente, por el teorema 2.

Teorema 6
a) Si $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión creciente de conjuntos de Φ tal que verifica que $\lim \varphi_n = \varphi,\ para\ n \to \infty$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} p(\varphi_n) = f(\varphi)$$

b) Si $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ es una sucesión decreciente de conjuntos de Φ tal que verifica que $\lim \psi_n = \psi,\ para\ n \to \infty$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} p(\psi_n) = f(\psi)$$

Demostración:
Trivial, por el teorema 3.

Teorema 7
La probabilidad de un suceso cualquiera está comprendida entre 0 y 1:

$$0 \leq p(A) \leq 1, \forall A \in \Phi$$

Demostración:
$\forall A \in \Phi, A \subseteq U \rightarrow p(U - A) = p(U) - p(A) = 1 - p(A) \geq 0 \rightarrow p(A) \leq 1$, y como p es una medida y por tanto definida positiva, se tiene, que $0 \leq p(A) \leq 1, \forall A \in \Phi$.

Teorema 8
La probabilidad del suceso complementario de un suceso dado es igual a la unidad menos la probabilidad del suceso dado.

Demostración:
De ser $U = A \cup \overline{A} \wedge A \cap \overline{A} = \phi \rightarrow p(U) = p(A) + p(\overline{A}) \rightarrow 1 = p(A) + p(\overline{A})$, por tanto:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Teorema 9
La probabilidad de un suceso cualquiera, A, es la suma de las probabilidades de los sucesos elementales cuya unión es A.
Demostración:
Sea $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, donde los $u_i, i = 1,2,...,n$ son elementales.
Si $A = \bigcup_{u_i \subseteq A} u_i \rightarrow \bigcup_{u_i \subseteq A} u_i \wedge \bigcap_{u_i \subseteq A} u_i = \phi \rightarrow p(A) = \sum_{u_i \subseteq A} p(u_1)$

Teorema 10 (Regla de Laplace)
Si los sucesos elementales de un fenómeno aleatorio son equiprobables, entonces, la probabilidad de un suceso cualquiera A resulta de dividir el número de sucesos elementales cuya unión es A por el número total de sucesos elementales del fenómeno aleatorio.

Demostración:
Sea $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, donde los $u_i, i = 1,2,...,n$ son elementales.
Como $p(u_1) = p(u_2) = ... = p(u_n)$, siendo $U = u_1 \cup u_2 \cup ... \cup u_n$ se tiene que

$$p(U) = p(u_1) + p(u_2) + ... + p(u_n) = n.p(u_1) \rightarrow 1 = n.p(u_1) \rightarrow p(u_1) = 1/n$$

Si son m los sucesos elementales cuya unión es A, se tiene, por el teorema anterior:

$$p(A) = \sum_{u_i \subseteq A} p(u_1) = m.p(u_1) = m.\frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

ESPACIO DE PROBABILIDAD CONDICIONAL O DE RENYI

Definición 6
Se define como espacio de probabilidad condicional o espacio de probabilidad condicional de Renyi a una cuaterna (U, Φ, H, p) donde:

- U es el conjunto de sucesos elementales.
- Φ es una σ–álgebra de partes de U.
- H es una parte de Φ.

- p es una medida sobre Φ que verifica las condiciones:
  a) Para $B \in H$ fijo, $\forall A \in \Phi, p(A,B) \equiv p(A/B) \geq 0$
  b) Si $A=B$, $p(A,A) = p(A/A) = 1$
  c) $\forall A \in \Phi, \forall B,C \in H / C \subseteq B \wedge p(B/C) > 0 \rightarrow p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B/C)}{p(B/C)}$
- Si $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ se dice entonces que el espacio de probabilidad condicional de Renyi está engendrado por el espacio probabilístico de Kolmogoroff.

Representaremos en adelante por $(U, \Phi, H, p(A/B))$ a un espacio de probabilidad condicional de Renyi engendrado por (U, Φ, p), espacio probabilístico de Kolmogoroff .

Teorema 11
Si es $(U, \Phi, H, p(A/B))$ un espacio de probabilidad condicional de Renyi se verifican las siguientes propiedades:
1) $p(A/B) = p(A \cap B/B)$
2) $p(A/B) \leq 1$
3) $p(\phi/B) = 0$
4) $A \cap B = \phi \rightarrow p(A/B) = 0$
5) $p(U/B) = 1$

Demostración:
1) De ser $p(A/B) = \dfrac{p(A \cap B/C)}{p(B/C)}$, se tiene, haciendo $B=C$:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B/B)}{p(B/B)} = \frac{p(A \cap B/B)}{1} = p(A \cap B/B)$$

2) Puesto que $A \cap B \subseteq B \rightarrow p(A \cap B/B) \leq p(B/B) = 1$, luego por 1):
$p(A/B) = p(A \cap B/B) \leq 1$
3) Trivialmente, pues $p(\phi) = 0$
4) $A \cap B = \phi \rightarrow p(A/B) = p(A \cap B/B) = p(\phi/B) = 0$
5) $p(U/B) = p(U \cap B/B) = p(B/B) = 1$

Teorema 12
a) Sea el espacio de probabilidad condicional $(U, \Phi, H, p(A/B))$. Si consideramos un suceso fijo $M \in H$ de modo que llamamos $p(A/M) \equiv p_M^{'}(A)$, entonces $(U, \Phi, p_M^{'})$ es un espacio probabilístico de Kolmogoroff.
b) Supongamos que es $N \in \Phi / M \cap N \in H$ y es estrictamente $p_M^{'}(N) > 0$, si ahora llamamos $p_M^{'}(A/N) = \dfrac{p_M^{'}(A \cap N)}{p_M^{'}(N)}$ se verifica entonces: $p_M^{'}(A/N) = p(A/M \cap N)$

Demostración:

a) Puesto que p'_M es una medida sobre la σ–álgebra Φ de partes de U, la terna $\left(U,\Phi,p'_M\right)$ es efectivamente un espacio probabilístico de Kolmogoroff.

b) Si es $p'_M(A/N)=\dfrac{p'_M(A\cap N)}{p'_M(N)}=\dfrac{p(A\cap N/M)}{p(N/M)}$, por teorema 11,1) es:

$p'_M(A/N)=\dfrac{p(A\cap N/M)}{p(N/M)}=\dfrac{p(A\cap N\cap M/M)}{p(N\cap M/M)}$ y por la condición c) de la definición 6 anterior, queda finalmente $p'_M(A/N)=\dfrac{p(A\cap N\cap M/M)}{p(N\cap M/M)}=p\left(A/M\cap N\right)$

Teorema 13
a) Sea el espacio de probabilidad condicional $\left(U,\Phi,H,p(A/B)\right)$. Si es $U\in H$ de modo que llamamos $p(A/U)\equiv p'(A)$, entonces $\left(U,\Phi,p'\right)$ es un espacio probabilístico de Kolmogoroff.
b) Supongamos que es $N\in\Phi$ y es estrictamente $p'(N)>0$, se verifica entonces que $p'(A/N)=\dfrac{p'(A\cap N)}{p'(N)}$.

Demostración:
Es trivial, desde la definición 6 y teorema anterior.

Resulta, en definitiva, que estos espacios de probabilidad condicional o espacios condicionales de Renyi, $\left(U,\Phi,H,p(A/B)\right)$, son más generales que los espacios probabilísticos de Komogoroff y que contienen a éstos como caso particular.

INDEPENDENCIA DE SUCESOS. PROBABILIDAD TOTAL. TEOREMA DE BAYES

Definición 7
Dados los sucesos aleatorios A y B de la sigma-álgebra Φ tales que $p(A)>0$, $p(B)>0$, se dice que A es independiente de B sii *p(A/B)=p(A).*

Teorema 14
Si un suceso A es independiente de B entonces B es independiente de A, verificándose para sucesos independientes:

$$A,B\in\Phi,\, independientes \leftrightarrow p\left(A\cap B\right)=p(A).p(B)$$

Demostración:

$$A\ independ\ de\ B\rightarrow p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=p(A)\rightarrow\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=p(B)\rightarrow$$

$$\rightarrow p(B/A)=p(B)\rightarrow B\ independ\ de\ A$$

Si ambos sucesos son independientes se verifica que $\dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}=p(B)\rightarrow$

$$\rightarrow p(A\cap B)=p(A).p(B)$$

Teorema 15
Sea $(U,\Phi,H,p(A/B))$ un espacio de probabilidad condicional. Se verifica que
a) Si $p(A)=0$ o bien $p(A)=1$, entonces el suceso A es independiente de cualquier otro suceso del σ–álgebra.
b) Si los sucesos A y B son independientes, entonces también son independientes los pares de sucesos $\{\overline{A},B\}$, $\{A,\overline{B}\}$ y $\{\overline{A},\overline{B}\}$.

Demostración:

a) Si $p(A)=0 \to p(A).p(B)=0$,
como $A\cap B\subseteq A \to P(A\cap B)\le P(A)=0 \to P(A\cap B)=0$, por tanto es
$p(A\cap B)=p(A).p(B) \to \{A,B\}\, independientes$
Si $p(A)=1 \to p(A).p(B)=1.p(B)=p(B)$,
$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B) \to p(A\cap B)=1+p(B)-p(A\cup B)=$
$=1+p(B)-1=p(B)$
por tanto es
$p(A\cap B)=p(A).p(B) \to \{A,B\}\, independientes$

b) Veamos que el par $\{\overline{A},B\}$ está formado por sucesos independientes sin lo son A y B:
$p(\overline{A}\cap B)=p(B)-p(A\cap B)=p(B)-p(A).p(B)=p(B).(1-p(A))=p(B).p(\overline{A})$
luego, $p(\overline{A}\cap B)=p(\overline{A}).p(B) \to \{\overline{A},B\}\, independientes$
La demostración de que el par $\{A,\overline{B}\}$ está formado por sucesos independientes es, obviamente, la misma.
Veamos que el par $\{\overline{A},\overline{B}\}$ está formado por sucesos independientes sin lo son A y B:
$p(\overline{A}\cap\overline{B})=p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)=1-p(A)-p(B)+p(A\cap B)=$
$=1-p(A)-p(B)+p(B).p(A)=p(\overline{A})-p(B)(1-p(A))=p(\overline{A})-p(B).p(\overline{A})=$
$=p(\overline{A}).(1-p(B))=p(\overline{A}).p(\overline{B})$
luego, $p(\overline{A}\cap\overline{B})=p(\overline{A}).p(\overline{B}) \to \{\overline{A},\overline{B}\}\, independientes$

Definición 8
Un conjunto de n sucesos de la σ-álgebra Φ se dicen *mutuamente independientes* si para un número k cualquiera de ellos tal que $k=2,3,\ldots,n$, se verifica que la probabilidad de su intersección es igual al producto de sus probabilidades, esto es, eligiendo una combinación cualquiera de orden k-esimo $\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ de los números $\{1,2,\ldots,n\}$ es: $p(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_k})=p(A_{i_1}).p(A_{i_2})\ldots p(A_{i_k})$

Definición 9
Se define como *sistema completo de sucesos en sentido amplio* a un conjunto de sucesos cuya intersección dos a dos es imposible y cuya probabilidad de la unión es la unidad (no necesariamente la unión de todos estos sucesos ha de ser el suceso seguro). Es decir, en un espacio probabilístico de Kolmogoroff, (U,Φ,p), se tendría que $\{A_1,\ldots,A_n\}$completo en s. amplio $\leftrightarrow A_i\cap A_j=0, si\ i\ne j \wedge p\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}p(A_k)=1$

Teorema 16 (de la probabilidad total)
Dado un espacio probabilístico de Kolmogoroff (U,Φ,p) y $\{M_1,M_2,...,M_s\}$ un sistema completo de sucesos en sentido amplio de la σ-álgebra Φ, con probabilidades estrictamente positivas ($p(Mi)>0,i=1,...,s$). Se verifica entonces que:

$$p(A)=\sum_n p(A/M_k).p(M_k),\ \forall A\in\Phi$$

Demostración:
Se tiene que $M_i\cap M_j=\phi, i\neq j\to(A\cap M_i)\cap(A\cap M_j)=\phi, i\neq j$, luego es

$$A=\bigcup_n(A\cap M_k)\to p(A)=p\left(\bigcup_n(A\cap M_k)\right)=\sum_n p(A\cap M_k)=\sum_n p(A/M_k)p(M_k)$$

Teorema 17 (de Bayes)
Dado un espacio probabilístico de Kolmogoroff (U,Φ,p) y sea $\{M_1,M_2,...,M_s\}$ un sistema completo de sucesos en sentido amplio de la σ-álgebra Φ, con probabilidades estrictamente positivas ($p(Mi)>0,i=1,...,s$). Se verifica entonces que, $\forall A\in\Phi/p(A)>0$:

$$p(M_j/A)=\frac{p(A/M_j).p(M_j)}{\sum_n p(A/M_k).p(M_k)}$$

Demostración:

$$p(M_j/A)=\frac{p(M_j\cap A)}{p(A)}=\frac{p(A/M_j).p(M_j)}{\sum_n p(A/M_k).p(M_k)}$$

DOCUMENTACIÓN:

Cramer, H.; "Métodos matemáticos de la Estadística". Ediciones Aguilar.
Frechet, M.; "Recherches theoriques modernes sur la theorie des probabilities", Gauthier-Villars, 10ª edic. 1950
Gndenko, B. ; "Teoría de probabilidades ». Editorial Mir
Schweizer, B;Sklar, A.; "Probabilistic metric spaces", North Holland, N.York, 1983
S. Chinea, C., "Aleatoriedad y álgebras de sucesos", (http://casanchi.com/mat/aleatoria01.pdf)